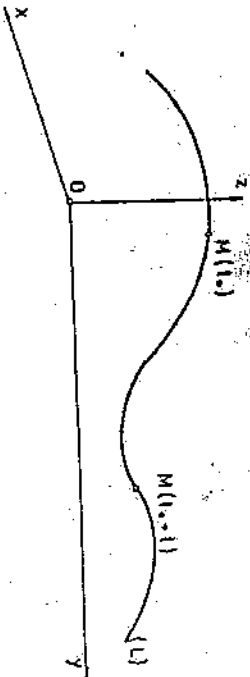


Na kraju možemo dati obrazac za izračunavanje dužine puta koji za neko vreme  $t$  predje tačka  $M$ .



Sl. 15

Sa slike 15. se vidi da je predjeni put za vreme  $t$ , geometrijski posmatrano, luk krive  $(L)$  izmedju tačaka  $M(t_0)$  i  $M(t_0 + t)$ , pa možemo pisati da je put:

$$S_M(t_0, t) = \int_{M(t_0)}^{M(t_0+t)} ds$$

Diferencijal luka dat je sa:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 dt^2 + \dot{y}^2 dt^2 + \dot{z}^2 dt^2} \\ = dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}; \quad \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}; \quad \dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} \quad (32)$$

pa je predjeni put:

$$S_M(t_0, t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt \\ = \int_{t_0}^{t_0+t} |v(t)| dt \quad (33)$$

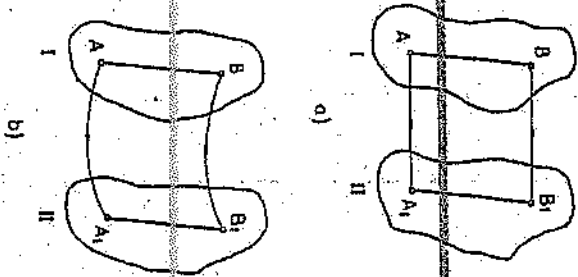
## Mehanika izučava najjednostavnije oblike kretanja

materije, koji se svode na pomeranja tela u prostoru i na njihova međud dejstva. Ova kretanja su najpristupačnija svakodnevnim iskustvu, te nam se zato zakoni mehanike čine jednostavnim i logičnim daleko više nego na primer zakoni kvantne mehanike, koji opisuju pojave koje ne možemo da doživimo svojim čulima.

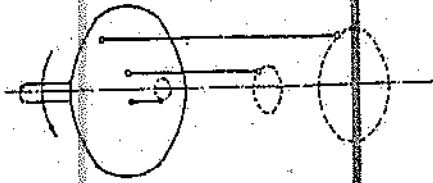
Da bismo izučavali kretanja tela treba da definišemo u odnosu na šta se tela kreću, odnosno da izaberemo referentni sistem. Izbor referentnog sistema nije jednostavan, jer ni jedno telo u svemiru ne miruje, te apsolutno nepokretan koordinatni sistem ne postoji. Zbog toga su sva kretanja relativna. Dugo vremena se smatralo da je vasiona ispunjena hipotetičnom supstancom nazvanom "etar", koja prenosi elektromagnetne talase i koja apsolutno miruje. Eksperimentalno otkriće, da se postojanje etara sada znatno ne može registrovati, dovele je do reformulacije cele klasične mehanike. Za praktične račune uvek se može izabrati neki pogodan referentni sistem, koji u zavisnosti od vrste problema mogu činiti zidovi laboratorije, površina Zemlje ili pak određeni sistem zvezda.

U velikom broju mehaničkih problema se dimenzije tela mogu zanemariti u uslovima datog problema, čime se dobijaju znatno uprošćena matematička rešenja problema. U svim ovakvim slučajevima se govori o kretanju "materijalne tačke" (tela sa konačnom masom i zanemarljivom zapreminom), koja ima sledeća svojstva: može se kretati, odnosno menjati svoj položaj u prostoru i vremenu, sadrži neku količinu materije i podvrgnuta je uzajamnom dejstvu sa okolinom.

Svako kretanje čvrstog tela može se smatrati kao kombinacija dva osnovna vida kretanja, translacije i rotacije. Pod translacionim kretanjem podrazumevamo takvo kretanje kod kojeg svaka prava ili ravan tela ostaje sama sebi paralelna (sl. 1). Ako se na primer telo iz položaja I premesti u položaj II, onda je njegova proizvoljna prava AB prešla u položaj  $A_1B_1$ , tako da je ostala sama sebi paralelna. Ako su se tačke A i B kretale po pravim linijama translacija je pravolinijska (sl. 1.a), a ako po krivim linijama onda je krivolinijska (sl. 1.b).



Sl. 1.



Sl. 2.

Rotacija je takvo pomeranje pri kojem se sve tačke tela kreću po koncentričnim krugovima, čiji centri leže na jednoj istoj pravoj, koja se naziva osa rotacije (sl. 2). Između translacionog i rotacionog kretanja postoji bitna razlika. Kod translacije sve tačke tela imaju jednake brzine, dok kod rotacije tačke tela imaju različite brzine, srazmerne rastojanju od ose obrtanja.

Prema objektu istraživanja mehanika se deli na:

- mehaniku materijalne tačke
- mehaniku čvrstih tela
- mehaniku kontinuuma, koja obuhvata:

teoriju elastičnosti i mehaniku fluida.

S obzirom na vrstu analize sistema mehaniku još delimo na:

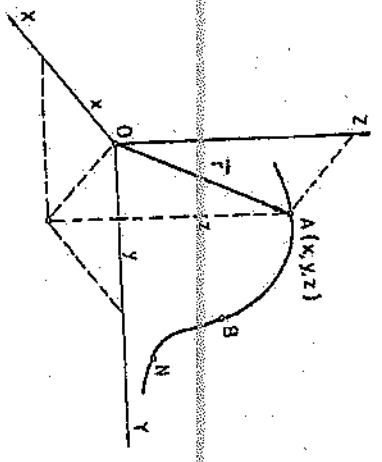
- kinematiku, koja proučava zakone kretanja bez obzira na sile koje su ta kretanja prouzrokovala;
- dinamiku, koja proučava zavisnost između sile i kretanja koje one prouzrokuju;
- statiku, koja proučava uslove ravnoteže tela pod dejstvom višestrukih sila

# K I N E M A T I K A

## 1. OSNOVNI POJMOVI KINEMATIKE

### a. Putanja, put i brzina

Kada se neko telo kreće, ono menja svoj položaj, pa se može reći da je kretanje relativna promena položaja prema okolini, odnosno prema referentnom sistemu. Linija koja spaja sve tačke u prostoru kroz koje prolazi materijalna tačka N pri kretanju, naziva se putanja ili trajektorija (sl. 1.1). Putanja

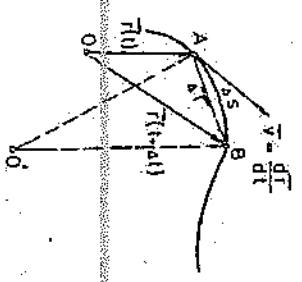


Sl. 1.1

može biti prava ili kriva linija, te kretanje prema obliku putanje može biti pravolinijsko i krivolinijsko. Deo putanje, na primer od tačke A do tačke B (sl. 1.1), koji materijalna tačka predje u određenom vremenskom intervalu, naziva se put. Ako se u svakom trenutku vremena može odrediti položaj materijalne

tačke, moguće je postaviti zavisnost između predjenog puta i proteklog vremena. Ta zavisnost predstavlja funkciju vremena  $s = s(t)$  i zove se zakon puta. Znači, da bi se u svakom trenutku odredio položaj materijalne tačke na putanju potrebno je znati: putanju (trajektoriju) i zakon puta. Položaj tačke A u odnosu na koordinatni početak O može se odrediti pomoću koordinata  $x, y$  i  $z$  ili pomoću radijus-vektora (vektor položaja)  $\vec{r}(O \rightarrow A = \vec{r})$ . Radijus-vektorom jedne tačke ( $\vec{r}$ ) naziva se vektor povučen iz koordinatnog početka u datu tačku (sl. 1.1) i on jednoznačno određuje položaj te tačke u prostoru. Radijus-vektor  $\vec{r}$  pri kretanju materijalne tačke, uopšteno govoreći, menja se i po intenzitetu i po pravcu.

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke po proizvoljnoj putanji (sl. 1.2). Neka se materijalna tačka u trenutku  $t$



Sl. 1.2

cu i teži nekoj granichnoj vrednosti, koja se obeležava sa  $\vec{v}$  i naziva se brzinom pokretne materijalne tačke u trenutku  $t$ , tj.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Sa slike 1.2. sledi da je vektor priraštaja  $\Delta \vec{r}$  jednak razlici radijus-vektora koji odnadjuju položaj materijalne tačke u trenutku  $t$  i  $t + \Delta t$ .

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Zamenujući  $\Delta \vec{r}$  u poslednji izraz za  $\vec{v}$  dobijamo prema (29) da je

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.1)$$

tj. pri vektorskom opisanju kretanja trenutna brzina je određena diferencijalnom količinom infinitezimalne promene vektora položaja i vremena, ili trenutna brzina je prvi izvod radijus-vektora po vremenu. Vektor  $\vec{v}$  ima pravac tangente na putanju i usmeren je u pravcu kretanja materijalne tačke.

Sa slike 1.2. vidimo da vektor  $\Delta \vec{r}$  za fiksirane tačke A i B ne zavisi od izbora centra O. Ako se centar premešti u tačku O',  $\Delta \vec{r}$  se ne menja; ne menja se ni granična vrednost

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{r}| \vec{r}_0) = \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{r}_0 + |\vec{r}| \frac{d\vec{r}_0}{dt} \quad (1.2)$$

izabran proizvoljno. Ako se vektor položaja izrazi preko jediničnog orta, kao prema relaciji (1),  $\vec{r} = |\vec{r}| \vec{r}_0$ , nakon diferenciranja po vremenu dobija se izraz za brzinu u obliku

Elementarni put  $\Delta s$  (sl. 1.2) razlikuje se, u opštem slučaju, od modula elementarnog pripreštaja  $|\Delta \vec{r}|$ . Kad  $\Delta t \rightarrow 0$ , onda je  $\Delta s$  identičan sa modulom  $|\Delta \vec{r}|$ , te se može napisati

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{umicno} \quad \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Tada izraz za brzinu može da se prepiše u obliku

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad (1.3)$$

tj. intenzitet brzine je određen diferencijalnom količinom puta i vremena, ili brzina je prvi izvod puta po vremenu. Ra-

na osnovu opšteg pravila diferenciranja proizlazi sledeće

$$\frac{d}{dt} (a\vec{b}) = a \frac{d\vec{b}}{dt} + \vec{b} \frac{da}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

zumljivo je da će brojna vrednost (intenzitet) brzine, tj. odnos  $\Delta s/\Delta t$  u svakoj tački putanje biti stalan (konstantan) ako se telo kreće jednoliko, tj. ako u jednakim intervalima vremena  $\Delta t$  prelazi jednake intervale puta  $\Delta s$ . Međutim, taj koeficijent  $\Delta s/\Delta t$  imaće različite vrednosti u raznim tačkama putanje ako se telo kreće promenljivo, tj. u jednakim intervalima vremena  $\Delta t$  prelazi nejednake intervale puta  $\Delta s$ . Tada odnos  $\Delta s/\Delta t$  daje srednju brzinu  $v_{sr}$  u datom intervalu vremena, tj.

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.4)$$

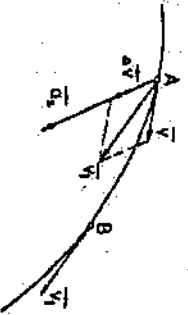
Srednja brzina je stalna brzina kojom bi telo pri jednolikom kretanju prešlo isti put  $\Delta s$  za isto vreme  $\Delta t$  kao kod promenljivog kretanja. Odstupanje srednje brzine od trenutne brzine je pri malim intervalima vremena obično zanemarljivo malo, te se može praktično zanemariti. Jedinica za brzinu je  $[m/s]$ .

#### b. Ubrzanje

Jedna od veličina koja doprinosi određivanju karakteristika kretanja je ubrzanje ili akceleracija. Ako je brzina materijalne tačke u trenutku  $t_1$  bila  $\vec{v}_1$ , a u trenutku  $t_2$  bila  $\vec{v}_2$ , onda se promena brzine  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$  u vremenskom intervalu  $t_2 - t_1$  zove srednje ubrzanje pokriveno materijalne tačke, tj.

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Kao što se iz (1.5) vidi srednje ubrzanje je vektorska veličina i određuje promenu stanja kretanja samo u određenom vremenskom intervalu. Međutim, ako je potrebno odrediti trenutno ubrzanje, tj. ubrzanje u jednoj određenoj tački putanje, postupa se na sličan način kao i pri definisanju trenutne brzine. Neka je na proizvoljnoj krivolinijskoj putanji (sl. 1.3) u trenutku  $t$  materijalna tačka bila u položaju A sa brzinom  $\vec{v}$ , a nakon vremena  $\Delta t$  u položaju B sa brzinom  $\vec{v}_1$ . Brzine  $\vec{v}$  i  $\vec{v}_1$  se u opštem slučaju razlikuju po intenzitetu i pravcu. Ako se vektor brzine  $\vec{v}$  transformatorno pomeri na zajednički početak sa vektorom brzine



$\vec{v}$  dobije se vektor prirašćaja  $\Delta\vec{v}$ . Vektor  $\Delta\vec{v}$  ima drugi pravac i smer u odnosu na brzinu  $\vec{v}$  i ušmeren je ka konkavnoj strani krivine. Prema izrazu (1.5) srednje ubrzanje je

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

a pravac  $\vec{a}_{sr}$  se poklapa sa pravcem vektora  $\Delta\vec{v}$ . Srednje ubrzanje  $\vec{a}_{sr}$  se u opštem slučaju razlikuje od trenutnog ubrzanja  $\vec{a}$  u tački A i po pravcu i intenzitetu.

### Sl. 1.3

Razlika će biti manja, ukoliko je vremenski interval  $\Delta t$  manji. Može se zaključiti da će srednje ubrzanje  $\vec{a}_{sr}$  dostići vrednost trenutnog ubrzanja  $\vec{a}$  u graničnom slučaju kada nastojanje  $\Delta t \rightarrow 0$ , odnosno vremenski interval  $\Delta t \rightarrow 0$ . Vektor  $\vec{a}$  je u tom slučaju u graničnoj vrednosti vektora  $\vec{a}_{sr}$ .

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.6)$$

tj. ubrzanje je diferencijalni količnik brzine i vremena. Vektor  $\vec{a}$  je usmeren ka centru krivine trajektorije. Kako su u slučaju pravolinijskog kretanja  $\vec{a}$  i  $\vec{v}$  uvek istog pravca, to se izraz (1.6) može napisati u skalarnom obliku,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (1.7)$$

tj. ubrzanje je prvi izvod brzine po vremenu; ili drugi izvod puta po vremenu. Jedinica za ubrzanje je  $[m/s^2]$ . U praksi se reko koristi pojam srednjeg ubrzanja. Zato ubuduće pod pojmom ubrzanja treba uvek podrazumevati trenutno ubrzanje.

Ako se vektor  $\vec{v}$  prema (1) napiše kao  $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{v}_0$  tada se prema (1.6) ubrzanje  $\vec{a}$  može predstaviti kao

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \vec{v}_0) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \vec{v}_0 + |\vec{v}| \frac{d\vec{v}_0}{dt} \quad (1.8)$$

Ubrzanje može biti pozitivno i negativno. Negativno ubrzanje naziva se usporenje.

## 2. PRAVOLINIJSKO KRETANJE

Kretanje kod kojeg je putanja prava linija naziva se pravolinijsko. Ako se koordinatni početak 0 nalazi na putanji (sl. 2.1) onda ort  $\vec{r}_0$  bilo koje tačke na putanji ne menja pravac.

Tada se ovo kretanje može matematički definisati uslovom

$$\vec{r}_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Zamenu uslova  $\vec{r}_0 = \text{const.}$  u jednačinu (1.2) dobija se

$$\vec{v} = \frac{d|\vec{r}|}{dt} \vec{r}_0 \quad (2.2)$$

Kako je  $|\vec{dr}| = ds$ , to je intenzitet brzine kod pravolinijskog kretanja dat kao

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.3)$$

Kod pravolinijskog kretanja vektor brzine ima pravac duž putanje.

Istim postupkom prema (1.6) i (2.2) dobija se izraz za ubrzanje kod pravolinijskog kretanja

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{r}_0 = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} \vec{r}_0 = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{r}_0 \quad (2.4)$$

odnosno, za intenzitet

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (2.5)$$

### 3. UNIFORMNO (RAVNOBREMNO) KRETANJE

Ako se materijalna tačka kreće po pravoj putanji, tako da u jednakim vremenskim intervalima prelazi jednake puteve, kretanje se zove "uniformno". Kod uniformnog kretanja brzina je konstantna, tj. nema prirašćaja brzine u jedinici vremena, pa je ubrzanje prema (1.7) jednako nuli. Ovaj uslov može se napi-

sati

$$\dot{v} = \text{const.}, \quad \ddot{a} = 0$$

(3.1)

Kod ovog kretanja se, očigledno, pojam srednje brzine izjednačuje sa pojmom trenutne brzine. Prema obrascu (2.2) je  $ds = v \cdot dt$ . Uzimajući da se kretanje vrši u vremenskom intervalu od  $t_0 = 0$  do  $t$  sa  $v = \text{const.}$  i da je predjeni put u početnom trenutku vremena  $s_0 = 0$ , dobija se

$$\int_{t_0=0}^t v dt = \int_{s_0=0}^s ds$$

(3.2)

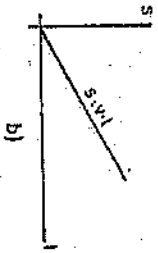
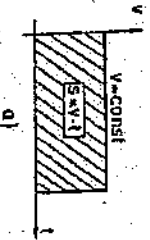
a nakon integraljenja

$$s = v \cdot t$$

(3.3)

tj. predjeni put jednak je proizvodu brzine i vremena. Jednačina (3.3) određuje zakon puta uniformnog pravolinijskog kretanja.

Jednačine (3.1) i (3.3) kojima se opisuje uniformno (ravnomerno) kretanje predstavljene su na slici 3.1. Za predjenu



Sl. 3.1

$v, t$  sledi da se put kod uniformnog kretanja može predstaviti i površinom (šrafirana površina).

#### 4. JEDNAKO UBRZANO KRETANJE

Ako se materijalna tačka kreće po putanji tako da u jednakim vremenskim razmacima prelazi različite puteve, kretanje se zove promenljivo. Promenljivo kretanje može biti ubrzano ili usporeno, već prema tome da li intenzitet brzine pokretne materijalne tačke raste ili opada. Promenljivo kretanje kod kojeg materijalna tačka u jednakim vremenskim razmacima dobija jednake priraštaje brzine (stalni iznos - ubrzanje  $\ddot{a}$ ) naziva se jednako ubrzano kretanje. Kod ovog kretanja ubrzanje je konstantno,  $\ddot{a} = \text{const.}$ , pa je prema (1.5)

$$d\dot{v} = \ddot{a} dt$$

(4.1)

Uzimajući da je u početnom trenutku kretanja ( $t_0 = 0$ ) pokretna materijalna tačka imala početnu brzinu  $\dot{v}_0$ , a na kraju vremenskog intervala  $t$  brzinu  $\dot{v}$ , sledi prema (4.1)

$$\int_{\dot{v}_0}^{\dot{v}} d\dot{v} = \int_{t_0=0}^t \ddot{a} dt$$

$$\dot{v} = \dot{v}_0 + \ddot{a} \cdot t$$

(4.2)

Kod pravolinijskog kretanja  $\dot{v}$ ,  $\dot{v}_0$  i  $\ddot{a}$  su istog pravca i kolinearni su sa putem, kada su vektor ubrzanja  $\ddot{a}$  i vektor brzine  $\dot{v}_0$  istog pravca i smera kretanje je jednako ubrzano, a ako su istog pravca, a suprotnog smera kretanje je jednako usporeno.

Na osnovu kolinearnosti vektora  $\dot{v}$ ,  $\dot{v}_0$  i  $\ddot{a}$  sa putem izraz (4.2) se može napisati u skalarnom obliku

$$v = v_0 + a \cdot t$$

(4.3)

gde se znak "+" odnosi na jednako ubrzano, a znak "-" na jednako usporeno kretanje.

Srednja brzina jednako ubrzanog kretanja u nekom intervalu vremena data je aritmetičkom sredinom početne ( $v_0$ ) i krajnje brzine ( $v$ )

$$v_{sp} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (4.4)$$

Srednja brzina odgovara stalnoj brzini kojom telo predje isti put za isto vreme, ako se pri tome kreće uniformno.

Iz izraza (2.3) i (4.3) sledi da je

$$ds = v_0 dt + a \cdot t dt$$

odnosno,

$$\int_{s_0}^s ds = v_0 \int_{t_0=0}^t dt + a \int_{t_0=0}^t t dt$$

pošto su  $a$  i  $v_0$  konstante. Nakon integraljenja dobija se obrazac za put kod jednako ubrzanog kretanja,

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (4.5)$$

gde je  $s_0$  put u početnom trenutku vremena  $t_0 = 0$ . Ako je  $s_0 = 0$  tada je

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (4.6)$$

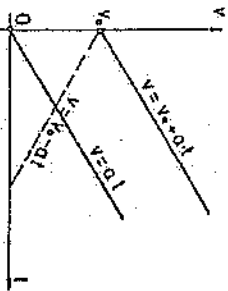
Rešavanjem jednačine (4.3) po  $t$  i zamenom u jednačinu (4.6) dobija se

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad (4.7)$$

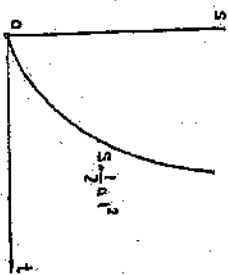
U praksi je čest slučaj da materijalna tačka krene iz stanja mirovanja ( $v_0 = 0$ ), tada jednačine (4.3), (4.6) i (4.7) imaju oblik

$$v = at; \quad s = \frac{at^2}{2}; \quad v^2 = 2as \quad (4.8)$$

Na slici 4.1. i 4.2. grafički su prikazane zakonitosti date jednačinama (4.3) i (4.8).



SI. 4.1



SI. 4.2

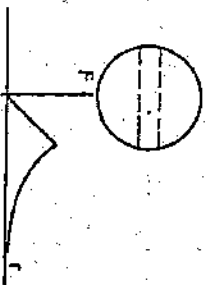
## 5. PRIMERI UBRZANOG KRETANJA

### 5.1. Slobodno padanje

Najpoznatiji i najčešće sretani primer kretanja sa konstantnom ubrzanostom je slobodno padanje. Pod slobodnim padanjem podrazumeva se padanje tela bez početne brzine u polju sile Zemljine teže sa izvesne visine  $H$ . Kako je ubrzanje Zemljine teže  $g$  konstantno (na malim visinama iznad Zemlje), a putanja prava linija, sledi da je slobodno padanje pravolinijsko jednako ubrzano kretanje.

Na sva tela koja slobodno padaju deluje konstantna sila - sila gravitacije. Kako je gravitaciona sila proporcio-

nalna, sila gravitacije je konstantna. Ako bi Zemlja bila homogena i ako bi se kroz njen centar mogao probušiti tunel onda bi gravitaciona sila koja bi delovala na jednu osećicu (tj. njenu težinu), manjala kao što pokazuje slika. Makarim bi se nalazila na Zemljinoj površini i sila bi linearno opadala ka nuli ako bismo se približavali osi i opadala kao  $1/r^2$  prema nuli ako bismo se udaljavali od Zemlje ka beskonačnosti.



onazna masi tela, to će i ubrzanje biti konstantno i jednako za

sva tela.\* Ovu naoko očiglednu činjenicu nije bilo lako uočiti, jer zbog delovanja otpora vazduha različita tela padaju različitim brzinama (sl. 5.1.a). Ako perce i metalnu kuglicu stavimo u staklenu cev (sl. 5.1.b) (Njutnov ogled) iz koje je izvučen vazduh, zapažamo da u njoj tada sva tela padaju jednakom brzinom. Iz toga zaključujemo da u bezvazdušnom prostoru sva tela padaju istom brzinom i da sva tela imaju isto ubrzanje  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .\*

Kako je, po pretpostavci,

$$v = gt \quad (5.1)$$

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.2)$$

Eliminacijom vremena  $t$  iz jednačina (5.1) dobija se brzina tela u trenutku udara o

Zemlju

$$v = \sqrt{2gh} \quad (5.2)$$

tj. brzina pri slobodnom padanju snazmerna je kvadratnom korenu iz visine padanja.

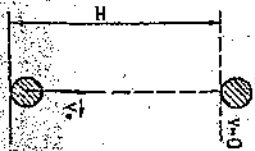
## 5.2. Hitac

Kretanje tela, koje je izbačeno početnom brzinom  $v_0$  u polju sile Zemljine teže, naziva se hitac. Predpostavlja se da u toku kretanja tela ne postoji sila trenja i da se kretanje odvija na malim visinama iznad Zemlje. U zavisnosti od toga pod kojim je uglom u odnosu na površinu Zemlje telo izbačeno, razlikujemo: vertikalni, horizontalni i kos hitac.

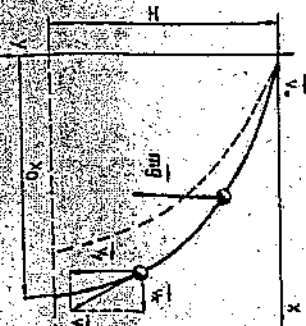
\* Zbog jednakosti gravitacione i inercijalne mase (vidi 22. §).

\*\* Gravitaciono ubrzanje  $g$  zavisi od geografske širine i razmorske visine.

a. Vertikalni hitac. Kod vertikalnog hica telo se izbacuje u vis početnom brzinom  $v_0$  (sl. 5.2).



Sl. 5.2



Sl. 5.3

Kako se ovdje radi o jednako usporenom kretanju, predjeni put i brzina posle vremena  $t$  nakon izbacivanja tela su

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.3)$$

$$v = v_0 - gt \quad (5.4)$$

Visina penjanja  $H$  i vreme penjanja  $t$  izračunava se iz uslova da je u najvišoj tački putanja brzina tela  $v = 0$ . Tada iz jednačine (5.4) sledi

$$t = \frac{v_0}{g} \quad (5.5)$$

Zamenom izraza (5.5) u izraz (5.3) dobija se visina penjanja

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad (5.6)$$

b. Horizontalni hitac. Kretanje tela, koje je izbačeno u horizontalnom pravcu, brzinom  $v_0$ , ponaša se horizontalni hitac (sl. 5.3). Horizontalni hitac zapravo je složeno kretanje, koje se sastoji od dve komponente:



- uniformnog kretanja duž x-ose (horizontalna komponenta),
- jednako ubrzanog kretanja (slobodnog padanja) duž y-ose (vertikalna komponenta).

Odgovarajuće jednačine za predjeni put su

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (5.7)$$

Ako se iz jednačina (5.7) eliminiše vreme  $t$  dobija se jednačina putanje

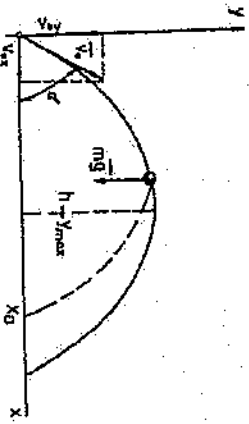
$$y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2 \quad (5.8)$$

Ako je telo izbačeno u pravcu horizonta sa visine  $H$  (sl. 5.3), može se izračunati njegov dolet  $x_D$  uvrštavanjem u jednačinu

$$(5.8) \quad y = H \text{ i } x = x_D, \text{ pa se dobija}$$

$$x_D = \sqrt{2 v_0^2 H/g} \quad (5.9)$$

c. Kos hitac. Kosim hicem naziva se kretanje tela koje je izbačeno početnom brzinom  $v_0$  pod oštrim uglom  $\alpha$  u odnosu na horizont u polju Zemljine teže. Ovo složeno kretanje, čija putanja leži u jednoj ravni, može se rastaviti na uniformno pravolinijsko kretanje duž x-ose i na jednako usporeno kretanje duž y-ose (sl. 5.4).



Sl. 5.4

Komponente početne brzine su

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad \text{ i } \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha \quad (5.10)$$

a komponente brzine u trenutku  $t$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_{0y} - g t = v_0 \sin \alpha - g t \quad (5.11)$$

Za vreme  $t$  telo duž x i y-ose prelazi put

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \quad (5.12)$$

Ako se iz jednačina (5.12) eliminiše vreme  $t$  dobija se jednačina putanje kod kosog hica

$$y = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (5.13)$$

Dolet tela  $x_D$  dobija se uvrštavanjem  $y = 0$  u jednačinu (5.13).

Rešenje dobijene kvadratne jednačine, koje je različito od nule, daje traženu vrednost dometa

$$x_D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \quad (5.14)$$

Maksimalna visina koju telo dostigne (teme parabole) nalazi se iz uslova  $dy/dx = 0$

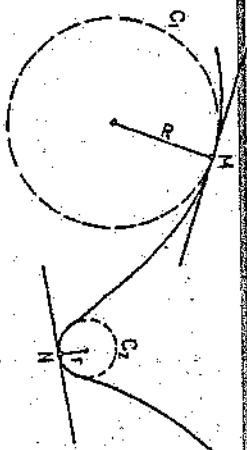
$$h = y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \quad (5.15)$$

Realno, u slučajevima hica, sila trenja vazduha postoji. Posledica dejstva ove sile na telo u kretanju je deformacija putanje kosog i horizontalnog hica, tako da putanje više nisu parabole već tzv. balističke krive, koje su na slici 5.3. i slici 5.4. prikazane isprekidanim linijama.

## 6. KRIVOLINIJSKO KRETANJE

Kod pravolinijskog kretanja brzina i ubrzanje se menjaju po intenzitetu i po pravcu. Svako krivolinijsko kretanje je ubrzano kretanje, jer promena brzine po pravcu izaziva ubrzanje i onda kada se ne menja intenzitet brzine.

Svako krivolinijsko kretanje može da se svede na kružno kretanje po fragmentima različitih poluprečnika. Kružnicom krivine kod putanje materijalne tačke (za posmatrane tačke M i N) (sl. 6.1), naziva se kružnica koja prolazi kroz tu tačku i poklapa se sa diferencijalno malim delom krivine ds u okolini te tačke. Sa slike se vi-



Sl. 6.1

$$K_1 = \frac{1}{R} \text{ i } K_2 = \frac{1}{r}$$

da da je poluprečnik krivine veći u tački M gde je krivina manja, a manji u tački N gde je krivina veća. Može se zaključiti da su krivine  $K_1$  i  $K_2$  kružnica  $C_1$  i  $C_2$  obrnuto srazmerne njihovim poluprečnicima u posmatranim tačkama, tj.

Očigledno je, da su poluprečnici krivina  $R$  i  $r$  uvek normalni na tangentu, odnosno na vektore brzina u toj tački.

\* Kod svake vektorske veličine promena pravca znači promenu same veličine.

## 7. KRUŽNO KRETANJE

Najjednostavnije krivolinijsko kretanje je kružno kretanje. Kod ovog kretanja putanja je kružna linija. Ako je brzina ovog kretanja konstantnog intenziteta, kretanje se zove uniformno (pravomerno) kružno kretanje, a ako se intenzitet brzine menja, kretanje se zove neravnomerno i to ubrzano ili usporeno. Ako je ubrzanje konstantno kretanje je jednako ubrzano, odnosno jednako usporeno.

Položaj materijalne tačke kod kružnog kretanja može se dati pomoću radijus-vektora, tj. vektora koji spaja centar sa položajem materijalne tačke na kružnoj putanji, a usmeren je od centra ka putanji. Kretanje po kružnoj putanji matematički se definiše relacijom

$$|\dot{r}| = \text{const.} \quad (7.1)$$

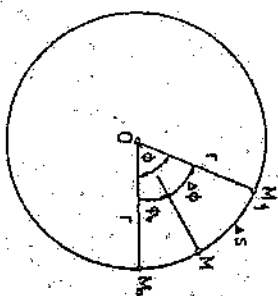
Radi jednostavnijeg opisivanja kružnog kretanja uvodi se pojam ugaone brzine i ugaonog ubrzanja.

a. Ugaona brzina. Ako se materijalna tačka (sl. 7.1) kreće po kružnoj putanji, onda je u svakom trenutku vremena njen položaj određen lukom  $M_1M_2$  odnosno uglom  $\phi$ . Ukoliko je u trenutku  $t_0$  položaj definisan uglom  $\phi_0$ , a u trenutku  $t$  uglom  $\phi$ , onda je odgovarajuća ugaona promena  $\Delta\phi = \phi - \phi_0$ , a vremenska promena  $\Delta t = t - t_0$ . Prema analogiji sa definisanjem srednje brzine kod translatornog kretanja (1.4) definiše se srednja ugaona brzina, kao ugaona promena za protoklo vreme

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad (7.2)$$

Sl. 7.1

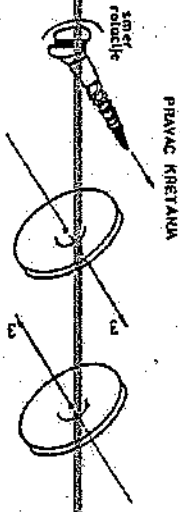
Kada se tačka M približava tački  $M_2$ , tj. kada  $\Delta t \rightarrow 0$ , srednja ugaona brzina teži trenutnoj ugaonoj



brzini tela u tački M

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \quad (7.3)$$

Ugaona brzina  $\omega$  je vektorska veličina, čiji je intenzitet brojno jednak uglu za koji se telo obrne u jedinici vremena, čiji se pravac poklapa sa pravcem ose rotacije i normalan je na ravan obrtanja, a smer se određuje smerom desnog zavrtnja (sl. 7.2). Pri rotaciji brzina pojedinih tačaka je zavisna od rasto-



Sl. 7.2

janja od ose rotacije, dok je ugaona brzina ista za sve tačke.

Jedinica za ugaonu brzinu je rad/s. Ako je materijalnoj tački potrebno vreme T (jedan period) da opiše ceo krug  $\Delta \phi = 2\pi$ , onda je prema (7.3) njena ugaona brzina  $\omega = 2\pi/T$ . Ako materijalna tačka izvrši  $\nu$  obrta u jedinici vremena (1s), onda je vreme potrebno da ona izvrši jedan obrt  $T = 1/\nu$ , pa je

$$\omega = 2\pi\nu \quad (7.4)$$

Kod kružnog kretanja koristi se kako pojam brzine  $v$ , tako i pojam ugaone brzine  $\omega$ , te se radi boljeg definisanja brzina  $v$  zove

<sup>a</sup> *Brzina obrtanja tela po krugu u jedinici vremena, odnosno frekvencija obrtanja  $\nu = 1/T$  izražava se u jedinicama Hz (herc).*

periferne ili obima brzina. Veza između ugaone brzine (7.3) i ranije definisane periferne brzine (1.1) može se izvesti na sledeći način: kao što se vidi na slici 7.3. ort-vektor položaja, se može razložiti na komponente

$$\vec{r}_0 = (\cos \omega t)\vec{x}_0 + (\sin \omega t)\vec{y}_0 \quad (7.5)$$

Prema (1.2), (7.1) i (7.5) dobija se

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}_0}{dt} = |\dot{\vec{r}}| = \\ &= |\dot{\vec{r}}| \omega (-\vec{x}_0 \sin \omega t + \vec{y}_0 \cos \omega t) = \\ &= |\dot{\vec{r}}| \omega \vec{v}_0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

te se korišćenjem osobina skalarnog proizvoda dobija izraz za vezu između  $v$  i  $\omega$ .

$$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \omega^2 r_0^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)$$

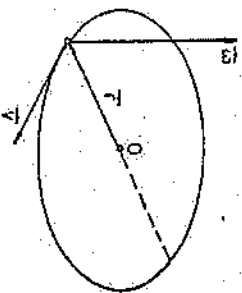
odnosno,

$$v = r_0 \omega \quad (7.7)$$

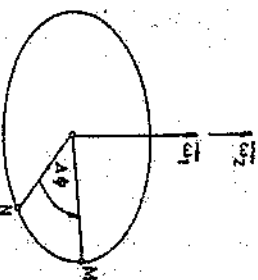
jer je  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$ .

Prema jednakosti (7.7), a na bazi definicije ugaone brzine može se videti (sl. 7.4) da je brzina  $\vec{v}$  vektorski proizvod ugaone brzine  $\omega$  i radijus-vektora  $\vec{r}$ , tj.

$$\vec{v} = \omega \times \vec{r} \quad (7.8)$$



Sl. 7.4



Sl. 7.5

Jednčina (7.7) daje vezu između intenziteta periferne brzine  $v$  i ugaone brzine  $\omega$ . Na osnovu relacije (7.7) i (7.4) dobija se izraz

$$v = 2\pi r \omega \quad (7.9)$$

b. Ugaono ubrzanje. Neka telo pri rotaciji u tački  $N$  ima ugaonu brzinu  $\omega_1$ , a u tački  $M$  ugaonu brzinu  $\omega_2$  (sl. 7.5). Srednje ugaono ubrzanje za vreme  $\Delta t$ , za koje telo opiše ugaon  $\Delta\phi$ , definiše se kao promena ugaone brzine  $\Delta\omega$  po protokom vremenu  $\Delta t$ , tj.

$$\alpha_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (7.10)$$

U granichom slučaju kad  $\Delta t \rightarrow 0$  srednje ugaono ubrzanje prelazi u trenutno ugaono ubrzanje u tački  $M$ .

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad (7.11)$$

odnosno,

$$\alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{d^2\phi}{dt^2} \quad (7.12)$$

### 8. RAVNOMERNO (UNIFORMNO) KRUGNO KRETANJE

Pod ravnomernim kružnim kretanjem podrazumeva se kretanje tela po krugu poluprečnika  $r$  sa konstantnim intenzitetom brzine,

$$v = |\dot{\mathbf{v}}| = \text{const.} \quad (8.1)$$

a promenljivoj pravca. Kod ovog kretanja je i ugaona brzina konstantna ( $\omega = \text{const.}$ ), što znači da se materijalna tačka kreće po kružnoj putanji sa konstantnim brojem obrta ( $\dot{\phi} = \text{const.}$ ). Prema izrazu (7.3) je  $d\phi = \omega dt$ . Uzimajući da se kretanje vrši u vremenskom intervalu od  $t_0 = 0$  do  $t$  sa  $\omega = \text{const.}$  i da je ugaon u podernom trenutku vremena  $\phi_0 = 0$ , dobija se

$$\int_{\phi_0=0}^{\phi} d\phi = \omega \int_{t_0=0}^t dt$$

a nakon integriranja

$$\phi = \omega t \quad (8.2)$$

što po analogiji odgovara zakonu ravnomernog pravolinijskog kretanja  $s = v \cdot t$ .

Ubrzanje kod ravnomernog kružnog kretanja dobija se preko izraza (1.8), (8.1), (7.5) i (7.5)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = -|\dot{\mathbf{r}}| \omega^2 (\ddot{x}_0 \cos \omega t + \dot{y}_0 \sin \omega t) = -\omega^2 \dot{\mathbf{r}} \quad (8.3)$$

Iz jednacine (8.3) vidimo da je kod ravnomernog kružnog kretanja ubrzanje različitno od nule i da je usmereno ka centru rotacije. Ubrzanje kod ovog kretanja se zove centripetalno ili normalno ubrzanje ( $a_n$ ). Kombinacijom izraza (7.7) i (8.3) dobija se veza između centripetalnog ubrzanja i periferne brzine

$$a_n = \frac{v^2}{r} \quad \text{ili} \quad \ddot{\mathbf{r}}_n = -\frac{v^2}{r} \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (8.4)$$

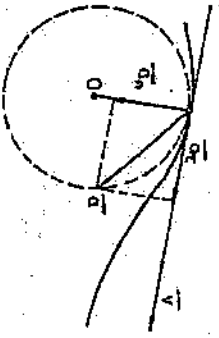
Kod neravnomernog (ubrzanog) kružnog kretanja brzina  $v \neq \text{const.}$  pa prema tome i  $\omega \neq \text{const.}$  Ako intenzitet periferne brzine nije konstantan, tada je

$$\frac{d|\dot{\mathbf{v}}|}{dt} \dot{\mathbf{v}}_0 \neq 0$$

tj.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} = \frac{d|\dot{\mathbf{v}}|}{dt} \dot{\mathbf{v}}_0 + \frac{d|\dot{\mathbf{v}}|}{dt} \dot{\mathbf{v}}_0 \quad (9.1)$$

što ukazuje da pored normalnog (centripetalnog) ubrzanja  $a_n$  postoji i tangencijalno ubrzanje  $a_t$ . Ovo se može bolje razumeti ako se uoči da vektor ubrzanja  $\vec{a}$  kod krivolinijskog kretanja u opštem slučaju zaklapa neki ugao sa tangentom, odnosno vektorom



brzine u nekoj tački na putanji (sl. 9.1). Ubrzanje  $\vec{a}$  povezano je sa svojim komponentama  $\vec{a}_t$  i  $\vec{a}_n$  sledećim relacijama

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \quad i \quad a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

pri čemu je prema (8.4) i (9.1)

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v^2}{r^2} \vec{r} \quad (9.2)$$

i

Sl. 9.1

$$\vec{a}_t = \frac{d|v|}{dt} \vec{v}_0 \quad (9.3)$$

Korišćenjem izraza (7.7) tangencijalno-ubrzanje može se napisati i u obliku

$$\vec{a}_t = r \frac{d\omega}{dt} \quad (9.4)$$

Kako je prema (7.11)

$$v = \frac{ds}{dt}$$

to je

$$a_t = r\alpha \quad (9.5)$$

Ubrzanje  $a_t$  postoji uvek pri neravnomernom kružnom kretanju, odnosno pri bilo kojem neravnomernom kretanju po krivoj liniji.

#### a. Jednako ubrzano kružno kretanje

Najjednostavnije ubrzano kružno kretanje je ono za koje je ugaono ubrzanje  $\alpha = \text{const.}$ . Po analogiji sa zakonima za jednako ubrzano pravolinijsko kretanje, obrasci (4.3), (4.5) i (4.7), dobijaju se sledeće jednačine

$$a = \text{const.} \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (9.6)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\phi$$

#### b. Jednako usporeno kružno kretanje

Ovo kretanje ima početnu ugaonu brzinu  $\omega_0$  i negativno ubrzanje, tj. ugaono usporenje, pa su osnovne kinematičke jednačine

$$-a = \text{const.} \quad \omega = \omega_0 - \alpha t$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t - \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = 2\alpha\phi \quad (9.7)$$

### 10. ANALOGIJA IZHEDJU PRAVOLINIJSKOG I KRUŽNOG KRETANJA

Izrazi koji su izvedeni u prethodnom tekstu ukazuju na formalnu analogiju između pravolinijskog i kružnog kretanja.

Preko relacija

$$s$$

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

može se niz izraza za pravolinijsko kretanje transformisati u izraze za kružno kretanje. Sledeća tabela daje korespondenciju

PRAVOLINIJSKO KRETANJE

KRUŽNO KRETANJE

$$s = v_0 t$$

$$\phi = \omega t$$

$$v = v_0 + at$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\phi$$

## II DINAMIKA MATERIJALNE TAČKE

### 11. SILA I MASA. KOLIČINA KRETANJA

U delu kinematike posmatrana su kretanja tela kao prostorno vremenska pojava bez objašnjenja uzroka, koji takva kretanja izazivaju. Deo mehanike, koji proučava i kretanja i njihove uzroke zove se dinamika. Pitanje odnosa sile i kretanja zapravo je centralno pitanje dinamike. Iskustvo pokazuje da je svaka promena stanja kretanja nekog tela uzrokovana izvesnim tipom interakcije ovog tela sa drugim telima. Fizička veličina, koja služi kao mera uzajamnog dejstva tela (interakcija) naziva se sila. Egzaktno, prema Njutnu, sila je vektorska promena količine kretanja tela bilo po veličini ili po smeru. Sila je određena intenzitetom, pravcem i smerom. Sila je dakle vektor. Treba naglasiti da sila možemo prepoznati samo po njihovom delovanju.

Do pojma mase može se doći ako posmatramo delovanje sile na različita tela. Kad, na primer, istom silom guramo drvenu i gvozdenu kuglu (istog oblika i zapremine) po glatkoj podlozi konstatovaćemo da će brzina gvozdene kugle biti manja od drvene, što znači da se ona više opire promeni kretanja od drvene. Ako želimo da promena njene brzine bude ista kao kod drvene mora se upotrebiti veća sila. Znači, različita tela pružaju različiti otpor promeni stanja svog kretanja. Ova osobina zapaža se kod svih tela i naziva se inercijom. Veličina koja predstavlja kvantitativnu meru za inercijost tela naziva se masa. Treba razlikovati inerciju od inertnosti tela. Često se ova dva pojma zbog sićnih naziva uzajamno zamenjuju, pa i poistovećuju. Inercija se odnosi na mirovanje ili kretanje tela bez obzira na vrednost njihove mase, a inertnost je opiranje promeni stanja kretanja. Masa je skalarna veličina, a osnovna jedinica za masu je kilogram (kg).  
Proizvod iz mase i brzine tela naziva se količina kretanja i označava se sa  $\vec{K}$  ( $\vec{K} = m \cdot \vec{v}$ ).

\* Isaac Newton (1643-1727), najveći fizičar, matematičar i astronom, a verovatno i jedan od najvećih umova u istoriji čovečanstva. Svojom dubokom posvećenošću je osnovu moderne mehanike. Otkrio je zakon opšte gravitacije. Istovremeno sa Leibnizom otkrio je diferencijalni račun.

### 12. NJUTNOVI ZAKONI

Njutnovi zakoni objašnjavaju zašto se tela kreću i kako se tela kreću pod određenim uslovima. Ovi zakoni predstavljaju temelje tzv. klasične ili Njutnove mehanike. Njutnovi zakoni potpuno definišu silu i to: postojanje sile, osobine sile (intenzitet, pravac i smer). Nedjurtim, pokazalo se da je Njutnova mehanika samo granični slučaj opšte relativističke i kvantne mehanike i da važi samo u slučaju kretanja tela sa velikom masom (u odnosu na masu atoma) i malom brzinom (u odnosu na brzinu svetlosti).

#### 12.1. Prvi Njutnov zakon. Inercijalni sistemi.

Prvi Njutnov zakon glasi: "Svako telo zadržava stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja dok druga tela svojim dejstvom na njega ne promene". Znači, bez interakcije se telo kreće konstantnom brzinom. Često se kaže da je ovakvo kretanje tela kretanje po inerciji. Matematički izraz ovog zakona je

$$m \cdot \vec{v} = \text{const.} \quad (12.1)$$

$$\vec{v} = \text{const. ili } \dot{\vec{x}} = 0 \quad (12.2)$$

Uslovi (12.1) i (12.2) mogući su samo kad na tela ne deluju nikakve spoljne sile, tj.

$$\vec{F} = 0 \quad (12.3)$$

Iz iskustva poznata ravnomerna pravolinijska kretanja nisu kretanja po inerciji, već kretanja u uslovima u kojima se više dejstava na telo međusobno poništavaju. U stvari, u realnim eksperimentima se ovaj zakon ne može ni proveriti, jer su u svemiru sva tela u međusobnoj interakciji. Ovaj zakon treba shvatiti kao osnovni princip, koji je tesno povezan sa definicijom tzv. inercijalnih sistema. Naime, ovaj zakon ne važi u svakom referentnom sistemu. Na primer, ako se kretanje tela opisuje u referentnom sistemu koji se kreće u krivini, tada namni sistem vezan za automobil koji se kreće u krivini, tada ni u odsustvu interakcije ne važi zakonitost da je brzina tela

Konstantna. Referentni sistemi u kojima važi prvi Njutnov zakon zovu se "inercijalnim referentnim sistemima". Ako je ubrzanje nekog referentnog sistema daleko manje od ubrzanja tela koje ispituje, tada se taj referentni sistem može smatrati približno inercijalnim. Jedan od često korišćenih inercijalnih sistema jeste heliocentrični referentni sistem čiji se početak vezuje za naše Sunce. Na osnovu prvog Njutnovog zakona se definiše i tzv. Klasičan princip relativnosti. Svi su referentni sistemi, koji se u odnosu na jedan inercijalni sistem kreću konstantnom brzinom, takodje, inercijalni sistemi.

Klasičan princip relativnosti tvrdi da su svi inercijalni sistemi ekvivalentni, te da se oblik fizičkih zakona ne menja pri prelasku u raznim inercijalnim sistemima. Ovakaj princip se može iskazati i tvrdnjom da apsolutna brzina nema smisla, jer se ni na koji način ne može izmeriti.

#### a. Galilejeve transformacije koordinata i klasično slaganje brzina

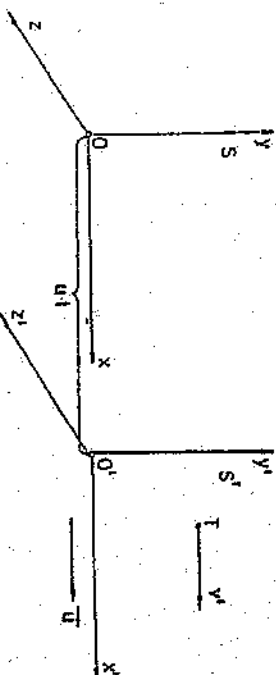
U osnovama klasične fizike leže pojmovi "apsolutnog prostora i apsolutnog vremena". To znači da se uzima da postoji sistem koji je apsolutno miruje u vasioni, pri čemu se kretanje u odnosu na njega naziva apsolutno kretanje. Sto se tiče vremena, uzima se da za celu vasionu postoji jedno jedino vreme koje jednako teče u svim inercijalnim sistemima.

Univerzalnost vremena označava da vreme teče apsolutno, nezavisno od sistema iz kojeg se posmatranje vrši i zasniva se na pojmu apsolutne istovremenosti. Pod apsolutnom istovremenošću se podrazumeva da ako su neka dva događaja istovremena u jednom sistemu, tada su istovremena i sa gledišta posmatrača u bilo kojem drugom sistemu, tj. u celoj vasioni.

Posmatrajmo dva inercijalna sistema S i S' koji se jedan u odnosu na drugi kreću uniformno brzinom u (sl. 12.1).

Neka se telo T nalazi u odnosu na koordinatni sistem O' na mestu x', y' i z' u trenutku t' i neka se kreće

brzinom v' u odnosu na ovaj sistem (sistem S').



Sl. 12.1

Postavlja se pitanje kako treba izračunati koordinate i brzinu ovog tela u odnosu na inercijalni sistem S? Usvajimo kretanje vremena od trenutka kada se tačke O i O' poklapaju. Prema Klasičnoj mehanici između koordinata i vremena koji određuju događaj u jednom i u drugom sistemu postoji sledeće relacije:

$$x = x' + ut; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t' \quad (12.4)$$

Ovakve transformacije, koje se vrše pri prelasku iz jednog sistema u drugi, zovu se Galilejeve transformacije. Na ovaj način izvedeno posmatranje nekog događaja u odnosu na drugi sistem koji se kreće zove se Njutnova relativnost. Jednčina  $t = t'$  koja izgleda u ovom slučaju izlišna ukazuje na činjenicu da u klasičnoj fizici postoji samo jedno vreme u svim sistemima referencije.

Jedna od važnih posledica Galilejevih transformacija

je klasični zakon sabiranja brzina. Naime, ako je  $v'$  brzina tela u odnosu na sistem  $S'$  koji se kreće brzinom  $u$  u odnosu na  $S$ , brzina istog tela, na osnovu navedenog zakona (12.4) u odnosu na sistem  $S$  koji miruje (si. 12.1), iznosi

$$v = v' + u \quad (12.5)$$

Kasnije ćemo videti da relacija (12.5), ma koliko se činila logičnom, nije primenljiva za kretanje sa brzinama bližim brzini svetlosti. Ovaj klasični zakon sabiranja je dobar u slučajevima kada se tela kreću malim brzinama. Na primer, ako se voz u odnosu na okolnu kreće brzinom  $v_1$ , a putnik, u odnosu na voz, brzinom  $v_2$ , brzina putnika u odnosu na okolnu izvan

maže iznositi  $v_1 + v_2$ , što je u saglasnosti sa iskustvom.

## 12.2. Drugi Njutnov zakon

Sva tela se nalaze u međusobnoj interakciji. Ova interakcija može biti direktna (medjusobnim dodirnom) ili indirektna (putem polja). Posebno je teško razumeti interakciju tela putem polja. I sam Njuton je bio dugo kritikovao kada je kretanje planeta objasnio "dejtstvom na daljinu". Rešenje opisa fizičkih polja i danas predstavlja jedan od centralnih problema fizike.

Fizička veličina kojom se opisuje interakcija među telima naziva se silom.

Drugi Njutnov zakon definiše kakve posledice izaziva dejstvo sile na telo. "Promena količine kretanja tela je proporcionalna sili koja deluje i urči se u pravcu sile", količinom kretanja zove se veličina  $k = m \cdot v$ , pa se drugi Njutnov zakon matematički izražava formulom

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) \quad (12.6)$$

U poslednjoj relaciji znak " $\frac{d}{dt}$ " znači ukoliko su smerovi kretanja putnika i voza isti, a znak " $-$ " ukoliko su suprotni.

Koja za kretanje tela sa konstantnom masom prelazi u oblik

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} \quad (12.7)$$

Masa koja figuruje u ovim formulama zove se "inercijalnom masom" i predstavlja meru odupiranja tela promeni stanja kretanja.

Jednica za silu je  $1 \text{ N}$ .

a. Drugi Njutnov zakon u neinercijalnim (ubrzanim) referentnim sistemima

Kao što je već rečeno Njutnovi zakoni u do sada navedenim oblicima važe samo u inercijalnim referentnim sistemima.

Neinercijalni referentni sistemi se kreću ubrzano u odnosu na inercijalne referentne sisteme.

Razmotrimo mehaničke procese u neinercijalnim (ubrzanim) referentnim sistemima. Pretpostavimo da jedan neinercijalni referentni sistem ima u odnosu na inercijalni referentni sistem ubrzanje  $\vec{a}_x$ . Ako je  $\vec{a}'$  ubrzanje tela u odnosu na ubrzanu referentni sistem, onda je ubrzanje  $\vec{a}$  tela u odnosu na inercijalni sistem.

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_x \quad (12.8)$$

te se II Njutnov zakon može napisati u obliku

$$m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_x); \quad \vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_x)$$

Ili

$$\vec{F} - m\vec{a}_x = m\vec{a}' \quad (12.9)$$

gde je  $\vec{F}$  "realna" sila koja deluje na telo, a proizvod  $-m\vec{a}_x$  tzv. "inercijalna" sila, leva strana jednačine (12.9) predstavlja rezultantu "realne" i "inercijalne" sile i ova rezultantna sila je jednaka proizvodu mase tela i ubrzanja u odnosu na ubrzanu neinercijalni sistem. Kada se ubrzanje  $\vec{a}'$  meri u odnosu na jedan koordinatni sistem koji se kreće sa telom, tada je  $\vec{a}' = 0$ , dok  $\vec{a}_x$  postaje ubrzanje tela  $\vec{a}$  u odnosu na inercijalni



sistem. Tada se jednačina (12.9) svodi na

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0; \vec{F} = m\vec{a}$$

što je identično sa jednačinom (12.7).

Navedimo jedan primer. Pre uzletanja, avion se kreće po pisti sa ubrzanjem od  $1 \text{ m/s}^2$  u odnosu na Zemlju. Jedna stjuardesa, mase  $m = 60 \text{ kg}$ , kreće se ubrzanjem od  $0,5 \text{ m/s}^2$  prema kabini pilota u odnosu na avion.

Posmatrajmo najpre avion kao referentni sistem, a Zemlju kao inercijalni sistem. Ubrzanje referentnog sistema u odnosu na inercijalni sistem iznosi  $a_r = 1 \text{ m/s}^2$ . Ubrzanje stjuardese u odnosu na ubrznani referentni sistem iznosi  $a' = 0,5 \text{ m/s}^2$ , a njeno ubrzanje u odnosu na Zemlju  $a = 1,5 \text{ m/s}^2$ . "Realna" sila koja deluje na stjuardesu (od polja aviona) iznosi  $F = ma = 90 \text{ N}$ , a "inercijalna" sila koja deluje na nju je  $-ma_r = 60 \text{ N}$ . Rezultanta realne i inercijalne sile prema (12.9) jednaka je proizvodu mase stjuardese i njenog ubrzanja u odnosu na avion

$$90 \text{ N} - 60 \text{ N} = 30 \text{ N} = 60 \text{ kg} \times 0,5 \text{ m/s}^2$$

Ako bi se stjuardesa posmatrala kao referentni sistem, tada bi bilo  $a_r = 1,5 \text{ m/s}^2$  i  $a' = 0$ .

Razmotrimo i primer kretanja tela (kosmonauta) u avionu koji slobodno pada. Referentni sistem vezan za avion ima ubrzanje u odnosu na Zemlju kao inercijalni sistem  $\vec{a}_r = \vec{g}$ , te je "inercijalna" sila jednaka  $-m\vec{g}$ . Na posmatrano telo (kosmonauta) u avionu deluje "realna" gravitaciona sila  $\vec{F} = m\vec{g}$ . Na osnovu (12.9) dobijamo

$$m\vec{g} - m\vec{g} = m\vec{a} \quad \text{odnosno} \quad \vec{a} = 0$$

Posmatrano iz aviona, dato telo (kosmonaut) se ne ubrzava iako na njega deluje stalno "realna" gravitaciona sila. Ovo telo (kosmonaut) ne deluje nikakvom silom na avion i kaže se da ono leblji. Ovakvo stanje tela naziva se "bestežinskim stanjem".

### 12.3. Treći Njutnov zakon

Treći Njutnov zakon bliže opisuje interakciju medju telima vodeći računa o oba tela koja su u interakciji.

Treći Njutnov zakon se može formulisati na sledeći način: "Snakom delovanja (akcije) postoji uvek suprotno i jednako protivdelovanje (reakcija) odnosno, delovanje dva tela jedno na drugo su jednaka i suprotnog smeru". Matematički

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (12.10)$$

ili prema (12.7)

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad (12.11)$$



Ako telo B deluje na telo A silom  $\vec{F}_A$ , tada i telo A deluje na telo B silom  $\vec{F}_B$ , pri čemu je

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \quad (12.12)$$

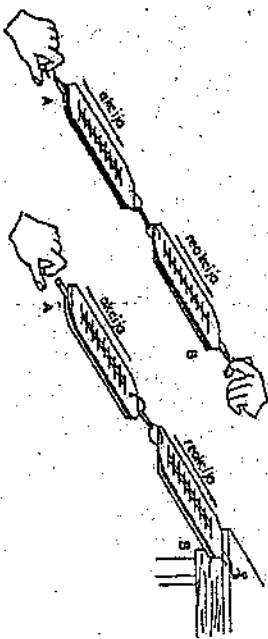
Treba podvući da ove dve sile ne deluju na isto telo, inče bi u suprotnom rezultanta sile bila jednaka nuli.

Sl. 12.2

Kvalitativno možemo ovaj zakon ilustrirati sledećim eksperimentom. Spojimo dva dinamometra kao na slici 12.3, i povucimo oba u suprotnim smerovima. Sila kojom dinamometar A vuče dinamometar B može se očitati na kazaljci dinamometra A. Načinje dinamometar B može se očitati sila kojom taj dinamometar vuče dinamometar A. Obe sile su jednake. Varijanta ovog eksperimenta je na desnoj strani. Sila kojom je vučen dinamometar A jednaka je (i suprotnog smeru) sili kojom ekser vuče dinamometar B.

Posledice III Njutnovog zakona lako uočavamo kod interakcije tela sične mase. Tada su po jednačini (12.11)

merljivu i njihovu ubrzanja. Takav je slučaj na primer, pri



Sl. 12.3

pucanju iz artiljerijskog opudja ili puške, pri skoku iz čamca na obalu i slično. Često je, međutim, masa jednog tela znatno veća. To je na primer slučaj kad odskočimo od tla ili kad kuglica odskoče od čvrste podloge. U tom slučaju ubrzanje Zemlje je, naravno, malo, pa opažamo samo odbijanje lakšeg tela.

Poznat je primer prividnog paradoksa **konj i kula**. Po III Njutnovom zakonu sila kojom konj vuče kola jednaka je i suprotnog smeru sili kojom kola vuču konja. Reklo bi se dakle, da će se ove dve sile poništavati. No to nije tako, jer konj pokrene kola iz mirovanja. Objašnjenje je jednostavno: čvrsto se upirući o tlo, konj je čvrsto vezan sa Zemljom, dok kola, ako zanemarimo trenje, to nisu. Sila kojom kola deluju na konja deluje zapravo na sistem konj + Zemlja. III Njutnov zakon dakle kaže da je

$$M_{\text{kola}} \cdot a = (m_{\text{konj}} + M_{\text{zemlja}}) \cdot a'$$

Otki to je masa u zagradi znatno veća, pa je  $a \gg a'$ , i konj vuče kola. Da je ovo razmatranje ispravno, vidimo kad nastupi poledica. Tada je veza konja sa Zemljom slabija, i u tom slučaju konj zaista ne može da vuče kola.

### 13. ZNAČAJ NJUTNOVIH ZAKONA U FIZICI

Nikad nije dovoljno istaći značaj Njutnovih zakona u fizici. Taj je značaj u prvom redu praktičan, jer je Njutn, svodeći međudejstvo tela na konkretnu matematičku formulu, otvorio put mehanici i njenoj primeni u tehnologiji. No jednako je važno i naučno značenje tih zakona, što je rezultiralo u davanju novog značenja pojmovima sile i mase. Pojam sile potiče iz našeg delovanja na prirodu. Analogijom čovek je silom smatrao sve što se u prirodi ponaša poput delovanja njegovih mišića: elastična opruga, žice itd. Napeta elastična tetiva, jednako kao i mišići naše ruke, mogu izazvati promenu kretanja, ubrzati ili usporiti tela. Njutn je pojam sile proširio na mehaniku cele prirode. Isto tako Njutn je uveo fizički pojam mase planeta i Sunca. Isto tako Njutn je uveo fizički pojam mase kao mere otpora nekog tela prema promeni kretanja. Pojam mase je blizak pojmu količine materije, ali nije s njim identičan. Njutn je verovatno bio svestan toga kada je formulisao svoj II zakon u obliku

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\text{mN})$$

$$F = m \cdot a$$

Formulisajući zakon sile pomoću vremenske promene količine kretanja, Njutn se možda ogradio od implikacije mogućih zaključaka o konstantnosti mase. Naime, masa kao otpor promeni brzine može zavistiti od te brzine. Činjenica je da tu zavisnost nismo dugo vremena bili u stranju da opažamo; no, ona nije isključena u Njutnovoj formuli III zakona mehanike.

Naravno, postavljanje pojma sile na prvo mesto u fizici ne može proći bez određene kritike. U prvom redu može se reći da pri dinamičkom delovanju sile mi direktno opažamo samo ubrzanja i usporavanja, a da same sile ne opažamo. Pojam sile koja deluje na daljinu, privlačenje dvaju tela kroz vakuum svemirskog prostora, mogao je Njutnovim savremenincima izgledati

savim neprilagodljiv. I kasnije je postojala hitava škola fizičara, pozitivisti, koji su se priklanjali mišljenju da je sila samo zgodan naziv za proizvod mase i ubrzanja.

Ne može se, međutim, poreći da se fizičko značenje sila zasniva na međusobnom dejstvu tela u prirodi, u prvom redu mogućnosti da se ispravno proračuna njihov međusobni položaj i kretanje. Naravno, i Njutnu je bilo jasno da se celokupnost pojava povezanih s pojmom sile može shvatiti samo u uzajamnom dejstvu dvaju tela jedno na drugo. U svetu zapravo postoje samo uzajamna dejstva. Da bi naglasio uzajamnost dejstva (sile između dva tela), Njutn je dodao zakonu kretanja zakon akcije i reakcije, koji matematički precizira tu uzajamnost. Tek principom akcije i reakcije objašnjava Njutnovi zakon kretanja potpuni fizički smisao.

U formalnom pogledu, koncipirajući svoje zakone aksiomatski\*, Njutn se ugledao na antičke uzore, u prvom redu na Euklida. On je, međutim, svojim aksiomama dao modern sadržaj. Njegova genijalnost ogleda se u tome što je uspeo da odvoji bitno od nebitnog i pruži i formalni okvir za rešavanje problema iz mehanike. Njutn, u principu, ni jednog problema kretanja koji se ne bi mogao rešiti uz pomoć Njutnovih zakona. Naravno, mnoga rešenja u praksi su veoma komplikovana, što zavisi od matematičkog izraza za silu. No univerzalna shema data diferencijalnom jednačinom (12.6) primenljiva je na svaki slučaj, bez obzira na komplikovanost matematičkog izraza za silu.

Danas su u prirodi poznata četiri osnovna tipa međudj dejstva među česticama. To je u prvom redu gravitaciona sila, zatim elektromagnetne sile, te napokon vrste sila koje su karakteristične za međudj dejstvo između elementarnih, sub-

\* U ovom smislu pogledajte, a i u daljem tekstu u izdanku "demonstracija", ako koristite nauku suprotne nazive "Njutnovi aksiomi" i "Njutnovi zakoni". Teme koja se odnosi na kretanje i sile postavio je Njutn u obliku aksioma. Najveći naučni konstatacija iz kojih je izvedio osnove zakone. Međutim, ispravno je reći da danas toliko puta proverena, a njihovu upotrebu tako opšira, da se za njih uobičajno nazivaju osnovni zakoni mehanike.

tomskih čestica, tzv. slabe interakcije i jake interakcije. Dok su sile slabe interakcije uočene kod beta-raspada radioaktivnih jezgara, jake interakcije u suštini su sile koje drže nukleone na okupu. Istini za volju treba reći da, iako o silama znamo mnogo, a gravitacionim i električnim silama znamo i matematički oblik, o prirodi i dubokom uzroku tih osnovnih sila možemo reći malo. Za elektromagnetne sile znamo odavno da potiču od izmene fotona, kvantna elektromagnetnog polja, a od nedavno su nam poznati i kvanti nosioci slabih nuklearnih sila. To su intermedijarni bozoni, čestice nazvane  $Z^0$  i  $W^{\pm}$ . Gravitacione sile predstavljaju još uvek problem opšte teorije relativnosti, a nismo blizu ni potpunom razumevanju jakih sila između nuklearnih i subnuklearnih čestica.

U tabeli 13.1. Brojke u drugom stupcu daju relativnu jačinu tih sila. Naravno, kako se radi o savim različitim silama koje deluju među različitim česticama, te brojke treba uzeti samo kao indikaciju. Tako će na primer, gravitaciona sila između dva elektrona biti  $10^{19}$  puta slabija ( $10^{-2}/10^{-40}$ ), od elektromagnetne, dok se o jakom međudj dejstvu između dva elektrona ne može govoriti. Ono postoji samo među teškim česticama, na primer protonima, neutronima i jezgama. Tako različitost između na primer jednog protona i jednog neutrona je čak  $10^{40}$  puta jače od gravitacionog, ali domet te sile je veoma mali, te se jake sila (kao i slaba) ispoljava samo u domenu atomskog jezgra.

TABELA 13.1. Jačine osnovne sile u prirodi

Međudj dejstvo	Jačina	Zakoni
gravitacija	$10^{-40}$	zakoni su poznati
slabo međudj dejstvo	$10^{-5}$	zakoni su uglavnom poznati
elektromagnetizam	$10^{-2}$	zakoni su poznati
jako međudj dejstvo	$10^0$	zakoni su delimično poznati

Tabela 13.1. pokazuje da su, grubo uzevši, nuklearne sile (jako međudejstvo) najjače od svih međudejstava u prirodi, a gravitacione su najslabije. One se ogledaju samo u prisustvu velikih masa.

Sljedeći korak u shvatanju prirode je nastojanje da se sve te sile svedu na manje-više zajednički uzrok. To je zadatak tzv. *ujedinjene teorije polja*. Prva ujedinjena teorija polja pojavila se još krajem XIX veka, kada je Maksiel postavio teoriju elektromagnetnog polja, koja u svom okviru ujedinjuje električane, magnetne i niz svetlosnih pojava. Danas se ovo otkriva, kome još uvek jedva da ima premca u istoriji nauke, na stoji proširiti na taj način i ostale teorijskom opisu obuhvate i elektromagnetne i slabe sile. Poslednjih godina su na tom području Weinberg, Glashow i Salam\* i drugi fizičari postigli značajne uspehe, pa danas možemo sa sigurnošću reći da je ta delimična sinteza konusana uspehom. Definitivni dokaz ispravnosti ujedinjene teorije elektromagnetnih i slabih nuklearnih sila, u tzv. elektroslabe sile je eksperimentalno otkrivenog spomenutih intermedijarnih bozona  $Z^0$  i  $W^{\pm}$ , koje su krajem 1981. godine u evropskom nuklearnom centru (CERN) u Ženevi, otkrili Rubia\*\* i saradnici\*\*\*

Još je dug put do uključivanja jakih ("nuklearnih") i gravitacionih sila u zajednički sa slabim i elektromagnetnim. Na tom putu jedva da smo prevali... - etne korake, nije čak jasno da li je takvo ujedinjenje uopšte i moguće.

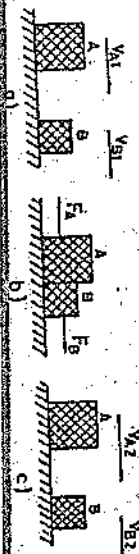
\* Steven Weinberg i Sheldon Glashow, američki fizičari, i Abdus Salam, britanski fizičar pakistanskog porekla, dobitnici su Nobelove nagrade 1979. godine za radove na ujedinjenju osnovnih međudejstava (sila) u prirodi.

\*\* Carlo Rubbia, dobitnik Nobelove nagrade 1984. godine za fizičku.

\*\*\* Detaljnije objašnjenje osnovnih interakcija dato je u drugom delu ovog izdanja u oblasti FIZIČKE PONAŠANJE U MIKROSVETU.

#### 14. IMPULS SILE I KOLICINA KRETANJA

Na slici 14.1. a telo A, koje klizi po podlozi bez trenja, stigne telo B, udari u njega (sl. 14.1. b) i, nakon uzajamnog dejstva, obo tela nastave kretanja promenjenim brzinama (sl. 14.1. c).



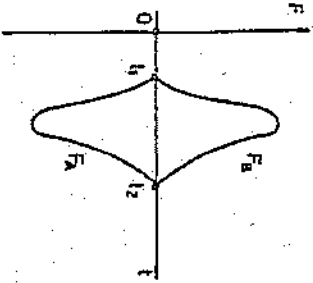
Sl. 14.1

Uočili smo da je za vreme sudara došlo do uzajamnog dejstva između dva tela, tj. da je telo A delovalo na telo B silom  $\vec{F}_B$ , a telo B delovalo na telo A silom  $\vec{F}_A$ . Te su sile prema III Njutnovom zakonu međusobno jednake i suprotnog smera, pa se može zapisati:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

Iz iskustva znamo da te sile nisu konstantne. One su manje u prvom trenutku sudara, zatim rastu do neke maksimalne vrednosti i onda opet opadaju do nule. Čeo opisan proces se dešava za vrlo kratko vreme, pa se teško može pratiti eksperimentalnim metodama. Sve takve sile koje su jake, a kratkotrajne, zovu se impulsne sile. Uopšte uzv, promena impulsnih sila u toku vremena može da bude različit. Približan oblik sila uzajamnog dejstva dva tela pri sudaru prikazan je na slici 14.2. Bitno je uočiti, da su bez obzira na njihovo trajanje, sile  $\vec{F}_A$  i  $\vec{F}_B$  u svakom trenutku jednake. Prema II Njutnovom zakonu sile  $\vec{F}_A$  i  $\vec{F}_B$  biće

$$\vec{F}_A = m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} \quad \text{I} \quad \vec{F}_B = m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$



SI. 14.2

Za vrlo kratko vreme dt važiće

$$\vec{F}_A dt = m_A d\vec{v}_A \quad \text{I} \quad \vec{F}_B dt = m_B d\vec{v}_B \quad (14.1)$$

Kako relacije (14.1) moraju važiti za svaki infinitesimalni vremenski interval od početka do kraja udarajanja, možemo napisati

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = \int_{t_1}^{t_2} m_A d\vec{v}_A \quad ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt = \int_{t_1}^{t_2} m_B d\vec{v}_B \quad (14.2)$$

Masa tela A i B nije se menjala pri sudaru, te je

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = m_A \vec{v}_{A2} - m_A \vec{v}_{A1} \quad ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt = m_B \vec{v}_{B2} - m_B \vec{v}_{B1} \quad (14.3)$$

Integral sile po vremenu, u kojem ta sila deluje, naziva se impuls sile ( $\vec{p}$ )

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (14.4)$$

Za specijalni slučaj konstantne sile, koja na telo deluje određeno vreme  $t$ , važi

$$\vec{p} = \int_{t=0}^t \vec{F} dt = \vec{F}t \quad (14.5)$$

Kako se proizvod  $m\vec{v}$  naziva količina kretanja, to izrazi na desnoj strani jednačina (14.3) predstavljaju promene količine kretanja  $m\vec{v}$ , odnosno

$$m_A \vec{v}_{A2} - m_A \vec{v}_{A1} = \Delta \vec{K}_A \quad \text{I} \quad m_B \vec{v}_{B2} - m_B \vec{v}_{B1} = \Delta \vec{K}_B \quad (14.6)$$

Na osnovu (14.4) i (14.6) jednačine (14.3) mogu da se napišu u obliku

$$\vec{p}_A = \Delta \vec{K}_A \quad \text{I} \quad \vec{p}_B = \Delta \vec{K}_B \quad (14.7)$$

$$\vec{p} = \Delta \vec{K} \quad (14.8)$$

tj. impuls sile jednak je promeni količine kretanja koju ta sila uzrokuje.

#### 15. ZAKON ODRŽANJA KOLIČINE KRETANJA

Skup od dva ili više tela nazivamo sistem tela. U zavisnosti od sila koje dejstvuju na sistem, sistemi mogu biti zatvoreni i otvoreni.

Zakon održanja količine kretanja detaljnije će biti proučen u dva slučaja:

## a. Za zatvoren sistem

U slučaju kada sile koje deluju na sistem potiču samo od uzajamnog dejstva tela, a delovanje spoljašnjih sila ne postoji (spoljašnje sile potiču od tela izvan sistema) kaže se da je sistem zatvoren.

Posmatrajmo zatvoren sistem od dva tela mase  $m_1$  i  $m_2$  koja se kreću brzinama  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  i koja interaguju silama  $\vec{f}_1$  i  $\vec{f}_2$ . Sile kojima ta tela deluju jedno na drugo jednake su, te je po III Njutnovom zakonu

$$\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \quad (15.1)$$

Ukupna količina kretanja sistema prema II Njutnovom zakonu merja se po pravilu

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \quad (15.2)$$

Iz (15.1) i (15.2) sledi

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (15.3)$$

A odavde integriranjem

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{const.} \quad \text{ili} \quad \sum_{i=1}^2 m_i \vec{v}_i = \text{const.} \quad (15.4)$$

Drugim rečima, u zatvorenom sistemu u kojem postoje samo dva tela u interakciji, zbir količina kretanja je konstantan. Ovaj zaključak važi samo za unutrašnje sile za koje važi III Njutnov zakon. Medjutim, u prirodi je poznato da postoje interakcije za koje ne važi III Njutnov zakon (npr. za čestice koje interaguju sa Lorencovom silom).

Zaključak se lako da proširiti i na sistem od n tela koja interaguju. Tada je prema (15.4)

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const.} \quad (15.5)$$

Ukupna količina kretanja zatvorenog sistema ne menja se tokom vremena. Jednaka (15.5) predstavlja matematički izraz zakona održanja ukupne količine kretanja zatvorenog sistema tela.

## b. Za otvoren sistem

Posmatrajmo otvoren sistem od dva tela na koji deluju, sem unutrašnjih sila  $\vec{f}_1$  i  $\vec{f}_2$ , koje su prema (15.1) jednake i spoljašnje sile  $\vec{F}_1$  i  $\vec{F}_2$ . U tom slučaju je

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (15.6)$$

II

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 \vec{K}_i = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i \quad (15.7)$$

Primenom jednadžine (15.7) na sistem od n tela, dobijamo

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{K}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

III

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(t) = \int \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt + C \quad (15.8)$$

Iz (15.8) pod uslovom da je

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}_R = \text{const.}$$

dobija se

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(t) = \vec{F}_R t + C \quad (15.9)$$

gde je  $\vec{F}_R$  rezultanta svih spoljašnjih sila. Ako pretpostavimo da je u početnom trenutku  $t=0$  ukupna količina kretanja sistema bila

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(t) = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i(0)$$

dobijemo

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i(t) - \sum_{i=1}^n \vec{K}_i(0) = A \left[ \sum_{i=1}^n \vec{K}_i \right] = \vec{F}_R t \quad (15.10)$$

Na osnovu (15.10), gde je  $\vec{F}_R t$  impuls rezultujuće sile ( $\vec{P}$ ), moze se zaključiti da je promena ukupne količine kretanja ( $\Delta \vec{K}_i$ ) otvorenog sistema jednaka impulsu rezultante spoljašnjih sila ( $\vec{P} = \Delta \vec{K}_i$ ).

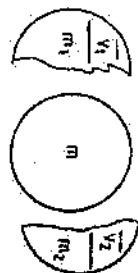
Jedinice impulsa ( $\vec{P}$ ) i količine kretanja ( $\vec{K}$ ) su iste:  $kgms^{-1}$ .

c. Primeri primene zakona održanja količine kretanja

1. Pri eksploziji, mina (mase  $m$ ) se raspadne na dva komada (mase  $m_1$  i  $m_2$ ), koji se kreću u horizontalnim pravcima, kao što je prikazano na slici 15.1. Komad mase  $m_1$  kreće se brzinom  $\vec{v}_1$ . Da bi se odredila veličina i smer brzine  $\vec{v}_2$ , pozna se od izraza (15.4). Pre eksplozije je ukupna količina kretanja sistema

$$m \cdot \vec{v} = 0 \quad (15.11)$$

a posle eksplozije



Sl. 15.1

Na osnovu zakona (15.5) je

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0 \quad (15.12)$$

što daje

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2 \quad (15.14)$$

2. Analizirajmo primer iz odeljka 14, prikazan na slici 14.1. Kako je po III Njutnovom zakonu

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

u svakom trenutku je

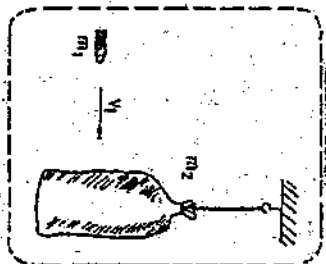
$$\text{impuls sile } \vec{F}_A = - \text{impuls sile } \vec{F}_B$$

Kako je impuls sile jednak razlici količine kretanja na kraju i početku delovanja sile, to je

$$m_A \vec{v}_A2 - m_A \vec{v}_A1 = - (m_B \vec{v}_B2 - m_B \vec{v}_B1)$$

Leva strana je ukupni impuls sistema pre sudara, a desna nakon sudara. Poslednja jednačina, dakle, pokazuje da se ukupni iznos količine kretanja nije tokom sudara izmenio, što je u skladu sa (15.5).

3. Posmatrajmo metak, mase  $m_1$ , koji se nakon ja-paljenja kreće brzinom  $\vec{v}_1$  i udara u vreću napunjenu peskom, mase  $m_2$ , koja je okačena da visi (sl. 15.2). Usled udara metka u vreću, vreća će dobiti izvesnu količinu kretanja i brzinu  $\vec{v}_2$ , koja se može odrediti primenom zakona održanja količine kretanja na sistem metak-vreća. Pre udara metka količina kretanja metka je  $m_1 \vec{v}_1$ , a posle udara sistem ima količinu kretanja  $(m_1 + m_2) \vec{v}_2$ . Pošto su ove dve količine kretanja jednake, sledi



$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

odakle proizilazi

$$v_1 = v_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1}$$

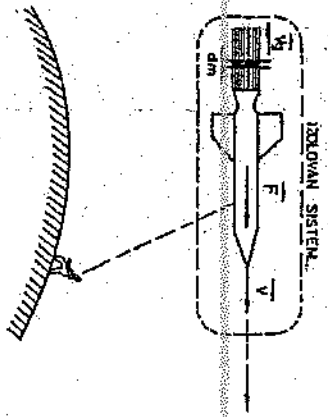
Kako je  $m_1 \ll m_2$  to je  $v_1 \approx v_2 \frac{m_2}{m_1}$

4. Kretanje rakete i

kosmičkih brodova. Zakon održanja količine kretanja primenimo na kretanje rakete, pri čemu se ona nalazi van osjetnog uticaja gravitacionog polja Zemlje (sl. 15.13)

Izolovani sistem, u ovom slučaju,

čine raketa i gasovi koji se izbacuju iz rakete kao proizvodni sagorjevanja.



Sl. 15.3

Ako, zbir masa konstrukcije rakete i goriva koje se u njoj nalazi u trenutku  $t$  obeležimo sa  $m = m(t)$ , a brzinu kretanja ove mase u tom trenutku vremenom sa  $v_x = v_x(t)$ , tada količina kretanja posmatranog sistema iznosi

$$K(t) = m v_x \quad (15.15)$$

Tokom izdeležavanja kratkog intervala vremena  $dt$  raketa ispusti masu  $dm$  produkata sagorjevanja. U procesu sagorjevanja ovi produkti sagorjevanja mase  $dm$  u odnosu na raketu dobijaju brzinu  $v_g$ , koja zavisi od tipa goriva i načina sagorjevanja, ali se ne menja u vremenu. Za račun izbačenih produkata sagorjevanja brzina rakete se promeni za veličinu  $dv_x$  tako da u trenutku  $t+dt$  iznosi  $v_x + dv_x$ . Masa konstrukcije rakete i preostalog goriva je  $m+dm$ , pri čemu je  $dm < 0$ . Na osnovu ovoga zaključujemo da je u trenutku  $t+dt$  količina kretanja sistema koji se sastoji od rakete i izbačenih produkata sagorjevanja data sa

$$K(t+dt) = (m+dm)(v_x + dv_x) + [v_g - (v_x + dv_x)] dm; \quad (15.16)$$

Na osnovu zakona o održanju količine kretanja (15.4) važi da

$$K(t) = K(t+dt)$$

odnosno prema (15.15) i (15.16)

$$m v_x = (m+dm)(v_x + dv_x) + (v_g - v_x - dv_x) dm$$

$$m dv_x + v_g dm = 0 \quad (15.17)$$

Ako se u izrazu (15.17) razdvoje promenljive  $m$  i  $v_x$ , on se može napisati u obliku

$$dv_x = -v_x \frac{dm}{m} \quad (15.18)$$

U trenutku to ispaljivanja rakete njena brzina je ravna nuli. Ukupnu masu konstrukcije rakete i goriva u njoj u trenutku te označimo sa  $M$ . Na osnovu ovega, relacija (15.18) se može

pošto se kretanje rakete i produkata sagorjevanja vrši po istom pravcu, nema potrebe za uvodnjim vektorskim oznakama.

Brzina kretanja produkata sagorjevanja mase  $dm$  u odnosu na posmatrača sa čiji je predstavljen paratiku brzine  $v$ , koju produkti sagorjevanja dobijaju u procesu sagorjevanja i brzina  $v_x + dv_x$  koju u trenutku  $t+dt$  ima raketa.



$$v_x(t) = -v \int \frac{dm}{m} + \int \frac{m(t)}{M} dt$$

odakle sledi konačni izraz za brzinu rakete u momentu  $t$

$$v_x(t) = v \ln \frac{M}{m(t)} \quad (15.19)$$

Prema (15.19) zaključujemo da je brzina rakete proporcionalna brzini produkata sagorevanja koju ona ispusti tokom leta. Za danas poznata goriva brzina  $v$  iznosi oko 3 km/s. U optimalnom slučaju gorivo sačinjava 90% odnosno 9/10 mase  $M$ , pa ako se ono potpuno iskoristi tokom leta onda je  $m(t) = M/10$ , gde je  $t$  moment kada je sva goriva iskorisćeno. Za ovaj slučaj izraz (15.19) daje

$$max v_x(t) = v_g \ln 10 = 3 \ln 10 = 3 \cdot 2,3 = 7 \text{ km/s} \quad (15.20)$$

Brzina sa vrednošću iz (15.20) nije dovoljna da

raketu izvede iz polja Zemljine težke, pa se zato pri lansiranju sa Zemlje moraju koristiti višestepene rakete.

Vidimo da je brzina izbacivanja pogonskog sredstva važan ograničavajući faktor u maksimalnoj brzini rakete i odatle potiče ideja da se u budućnosti prave rakete koje će reaktivnu silu ostvarivati izbacivanjem svetlosnih kvanata - fotona.

Deljenjem (15.17) sa  $dt$ , dobija se

$$m \frac{dv_x}{dt} + \frac{dm}{dt} v_g = 0 \quad (15.21)$$

Član  $dv_x/dt$  je ubrzanje rakete  $\ddot{x}$ , te je prvi član u (15.21) proizvod  $ma$  i predstavlja reaktivnu silu rakete  $F$ , pa je

$$F = - \frac{dm}{dt} v_g \quad (15.22)$$

U pogonska sila rakete srazmerna je izbačenoj masi gasa u jedinici vremena  $dm/dt$  i brzine  $v_g$  isticanja gasova.

Pri startu APOLA 11 (koji je odneo kosmonaute na Mesec) raketni motori su izbacivali 12 tona sagorelih gasova u svakoj sekundi ( $dm/dt = 12 \cdot 10^3 \text{ kg/s}$ ), razvijajući pogonsku silu od  $3,2 \cdot 10^7 \text{ N}$ . Na osnovu ovih podataka izlazi da je brzina isticanja gasova  $v_g = 2700 \text{ m/s}$ .

Pošto se kretanje raketa zasniva na zakonu održanja količine kretanja, to znači da se one mogu kretati kroz bezvazdušni prostor. To je tzv. princip reaktivnog pogona. Najveći reaktivni pogon je jedino mogući pogon u astronautici.

## 16. DINAMIKA KRUŽNOG KRETANJA

### 16.1. Sile kod kružnog kretanja

Neka se telo mase  $m$  (sl. 16.1) ravnomerno kreće

(vzdušno) oko jedne nepomične tačke C po krugu poluprečnika  $r$ . Pri ovakvom kretanju postoji samo normalno (radijalno) ubrzanje  $\ddot{x}_n$  jednako prema (8.4)

$$\ddot{x}_n = - \frac{v^2}{r} \hat{r}_0 \quad (16.1)$$

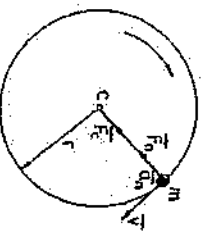
Na osnovu II Njutnovog zakona može da se zaključiti da ovo ubrzanje treba da je posledica sile

$$\ddot{F}_n = m \ddot{x}_n = - \frac{mv^2}{r} \hat{r}_0 \quad (16.2)$$

koja je usmerena ka centru rotacije.

Ova sila se naziva centripetalnom silom koja svojim dejstvom vuče telo prema centru i savija njegovu putanju.

Ona, naravno, nije neki poseban tip sile koja je svojstvena samo kružnom kretanju. Naziv centripetalna odnosi



Sl. 16.1

se zapravo na njen efekat da stalno privlači telo ka centru obrtanja. To mogu biti elastične sile u nekoj šipki, opruzi ili zategnutom konou, dalje to može biti sila težke, električna i

magnetna sila. Kod kretanja planeta oko Sunca, centripetalna sila dolazi od privlačenja masa (gravitacije). Centripetalna sila ne vrši rad, jer njen pravac uvek zaklapa sa pravcem kretanja ugao od  $\pi/2$ .

Ako ova sila nije dovoljna da telo sa određenom brzinom  $v$  održi na putanji poluprečnika  $r$ , telo prelazi na putanju sa većim poluprečnikom. Ako se delovanje ove sile prekine, telo nastavlja da se kreće pravolinijski u smeru tangente na kružnicu po kojoj se vrtelo, sa brzinom koju je imalo u tom trenutku.

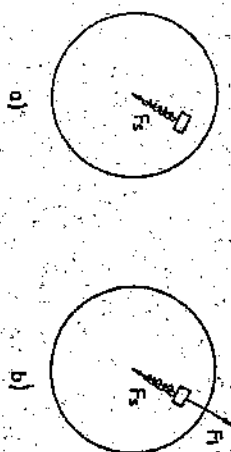
U inercijalnom referentnom sistemu pojavljuje se kod rotacije isključivo centripetalna sila koja vuče telo ka centru. Ta sila je odgovorna za rotaciju, jer daje radijalno ubrzanje koje zakrivljuje putanju tela. Na osnovu III Njutnovog zakona može se zaključiti da na telo koje je izvor centripetalne sile  $\vec{F}_c$  deluje i odgovarajuća sila reakcije  $\vec{F}_c'$  (sl. 16.1). Ova sila reakcije deluje na centar, istog je intenziteta i pravca, a suprotnog smera i naziva se centrifugalnom silom. Očigledno je  $\vec{F}_c' = -\vec{F}_c$ . Ali ne treba zaboraviti da se navedena ravnoteža ne odnosi na telo koje se okreće, već na telo (šipku, konac) koje ga spaja sa centrom obrtanja. Kao što će se videti u sledećem odeljku postoji i centrifugalna inercijalna sila koja je fiktivna sila i koja se uvodi da bi se opisalo kretanje tela u neinercijalnom sistemu.

#### 16.2. Sile u referentnom sistemu koji rotira ravnomerno

Sva izlaganja iznetra u 16.1. važe u inercijalnom sistemu referencije, odnosno za posmatrača koji stoji van tela koje rotira. Nešto se drugačije okolnosti javljaju ako se posmatrač okreće zajedno sa telom.

Neka se telo mase  $m$  nalazi izvan ose rotacije na horizontalnom podu rotirajuće platforme (sl. 16.2) i neka je vezano elastičnom oprugom za centar rotacije. Sile koje deluju na telo u sistemu koji jednoliko rotira analiziraćemo sa stanovišta posmatrača koji miruje i nalazi se van platforme i sa

stanovišta posmatrača koji se nalazi na sredini platforme i rotira zajedno sa telom.



Posmatrač, koji se nalazi izvan platforme, uočava da telo jednoliko kruži oko središta platforme pod dejstvom sile elastične opruge  $\vec{F}_s$ , koja deluje prema središtu platforme (sl. 16.2.a).

Uzmimo sada da se posmatrač rotira zajedno sa telom na platformi. Za njega telo miruje. S druge strane, on uočava da je opruga nastegnuta uvek konstantnom silom, tj. da opruga deluje konstantnom silom na telo (sl. 16.2.b). Kako telo uprkos svemu miruje, posmatrač mora zaključiti da na telo deluje još jedna sila koja poništava delovanje opruge. Ta sila mora po intenzitetu biti jednaka sili opruge (centripetalnoj), a po smeru mora biti suprotna. Na osnovu III Njutnovog zakona može da se napiše da je za posmatrača izvan platforme (inercijalni sistem)

$$\vec{F}_s = -\frac{mv^2}{r} \hat{r}_0 \quad (16.3)$$

a za posmatrača koji rotira na platformi (rotirajući sistem)

$$\vec{F}_s + \vec{F}_c = 0 \quad (16.4)$$

Sa  $\vec{F}_c$  označena je dodatna sila koja deluje na telo u neinerci-

jalnom sistemu. Upoređivanjem jednačina (16.3) i (16.4) proizilazi

$$\vec{F}_2 = \frac{mV^2}{r} \vec{1}_0 \quad (16.5)$$

tj. dodatna sila ima istu vrednost kao i centripetalna. Ta sila predstavlja tzv. inercijalnu silu, koju prema njenom delovanju (od centra van) nazivamo centrifugalnom inercijalnom silom.

Ova centrifugalna sila se pojavljuje samo u (neinercijalnom) sistemu koji rotira. To je, dakle, zamišljena sila koje nema u (mirujućem) inercijalnom sistemu, a koju dodajemo u neinercijalnom sistemu da bi se sačuvala važnost II Njutnovog oprepu prema van (centrifugalnu silu). Istu silu opaža i putnik u automobilu u krivini (sila ga izbacuje prema spoljašnjem delu krivine, tj. u smeru radijusa krivine), kao i astronaut koji u veštačkom satelitu kruži oko Zemlje. Sa njegovog staništa na svaki predmet u satelitu deluju dve sile: privlačna sila Zemlje, koja ga vuče radijalno prema Zemlji i centrifugalna sila koja ga tera radijalno od Zemlje. Kako se satelit zadržava na konstantnoj udaljenosti od Zemlje, rezultantna tih dveju sila mora biti jednaka nuli. Prema tome, za astronauta svi predmeti lebde u satelitu, tj. oni su bez težine. S druge strane, posmatrač izvan satelita neće da svi predmeti u satelitu izgledaju kao da nemaju težine, zato što svi imaju jednako ubrzanje.

Ako posmatrač u neinercijalnom sistemu želi da primeni II Njutnov zakon, tada mora uključiti delovanje inercijalne sile  $\vec{F}_i = m\vec{a}$ .

Prema tome, za posmatrača u neinercijalnom sistemu II Njutnov zakon glasi: *zbir svih realnih sila (RF) i inercijalne sile  $\vec{F}_i$  jednak je proizvodu mase i ubrzanja*

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} \quad (16.6)$$

ili u skalarnom obliku

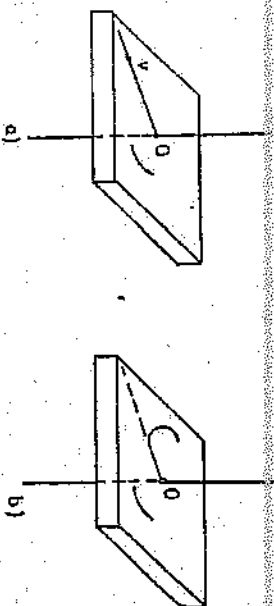
$$\sum F - m \cdot a_y = m \cdot a \quad (16.7)$$

gde je  $F$  "realna" sila koja deluje na telo,  $a_y$  ubrzanje referentnog sistema prema inercijalnom i  $\vec{a}$  ubrzanje tela prema referentnom (neinercijalnom) sistemu.

Kao što smo već rekli izraz (16.6) je najopštija formulacija II Njutnovog zakona, koji važi za svakog posmatrača, bez obzira da li se nalazi u inercijalnom ili neinercijalnom sistemu. Za specijalan slučaj da se inercijalne i neinercijalne sile kompenzuju, ubrzanje  $a=0$ , tela miruju (ili se kreću jednoliko po pravcu) u neinercijalnom sistemu.

#### PROBLEM: Jedan primer inercijalne sile

Ja se javlja pri kretanju tela u sistemu koji rotira. Meke posmatrač, koji se nalazi na osi rotacije rotirajuće platforme (sl. 16.3), baci kuglu nekom početnom brzinom tako da se bez trenja kotrlja po podu. Za posmatrača van platforme (inercijalni sistem) kretanje će biti pravolinijsko sa stalnom



Sl. 16.3

brzinom  $v$  (sl. 16.3.a), dok će za posmatrača na platformi (neinercijalni sistem) ovo kretanje biti krivolinijsko i to ubrzano (sl. 16.3.b). Kugla će skrenuti od pravca početne

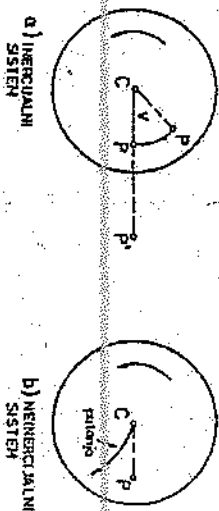
brzine i to suprotno od smera rotacije. Posmatrač na platformi zaključuje da na kuglu deluje sila koja je upravana na pravac početne brzine. Ta sila, koja skreće kuglu od pravca po kojem bi trebalo po inerciji da se kreće, zove se Koriolisova sila i data je izrazom

$$\vec{F}_K = 2 m \vec{v}_r \times \vec{\omega} \quad (16.3)$$

ili u vektorskom obliku

$$\vec{F}_K = -2 m (\vec{\omega} \times \vec{v}_r) \quad (16.9)$$

gde je  $\vec{v}_r$  - relativna brzina tela u odnosu na sistem koji se okreće. Značenje Koriolisove sile može se uočiti i na primeru prikazanom na slici 16.4. Posmatrač u središtu C rotirajuće ploče usmeri i opali hitac prema tački P na ploču u času kad

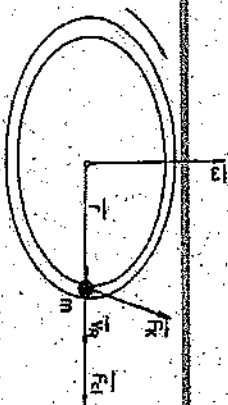


Sl. 16.4

se tačka P nalazi na istom pravcu kao i tačka P' izvan ploče. Tako opaljen metak neće, međutim, pogoditi cilj u P jer će se u vremenu  $t = CP/v$ , potrebnom da metak pređe put CP, tačka P zarotirati u novi položaj P'. Za posmatrača koji se ne nalazi na rotirajućoj ploči (tj. posmatrač u inercijalnom sistemu - sl. 16.4.a) ovo je razlog zbog kojeg metak nije pogodio P i on neće uvesti nove sile da to objasni. Međutim, posmatrač koji se nalazi na rotirajućoj ploči (tj. čiji je referentni sistem neinercijalan, kao npr. naš na Zemlji) uo-

čiće da nije pogodilo cilj P, jer metak nije putovao po pravcu, već je opisao zakrivljenu putanju. Za njega će, dakle (u neinercijalnom sistemu sl. 16.4.b), rezultat biti identičan kao da je na metak delovala sila (Koriolisova sila) normalna na smer kretanja.

Iz navedenih primera vidi se da se Koriolisova sila pojavljuje u neinercijalnom referentnom sistemu kad god telo ima komponentu brzine po smeru normalnom na smer ose rotacije sistema (sl. 16.5).



Sl. 16.5

Na Zemlji će se delovanje Koriolisove sile osetiti, na primer pri kretanju u smeru sever-jug na većim geografskim širinama. Tako reke koje imaju približno pravac sever-jug skreću na zapad. Usled Koriolisove sile javlja se i skretanje severnih vetrova ka zapadu. Premda su te sile slabe, ipak one imaju značajnu ulogu u kretanju Zemljine atmosfere. U balistici se mora voditi računa o pojavi Koriolisove sile, kada postoji komponenta kretanja u pravcu Zemljinog meridijana. Koriolisova sila se pojavljuje i u atomskim dimenzijama kod tzv. difrakcijskih molekula, a postoje indikacije da se u atomskim jezgriama izvesne pojave mogu protumačiti delovanjem Koriolisove sile.

## 17. PRIMERI I ZNAČAJ CENTRIFUGALNIH INERCIJALNIH SILA

Centrifugalne inercijalne sile imaju veliki značaj za objašnjenje nekih pojava u prirodi, za različite primene u tehnici i svakodnevnom životu. Kao primere navešćemo sledeće:

1. Na dvema horizontalnim šipkama (sl. 17.1) postavljene su jako pokretne mase  $m_1$  i  $m_2$ , koje su međusobno vezane. Kada se mašina stavi u pokret, na telo veće mase  $m_2$  deluje veća centrifugalna inercijalna sila, tako da ono privuče manju masu  $m_1$ . Centrifugalne sile, koje deluju na oba



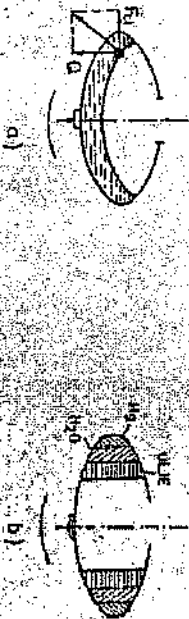
Sl. 17.1.

tela (zategnutost konca), međusobno su uvek jednake a suprotnog smera, te se uzajamno poništavaju.

2. Na aparatu (sl. 17.2) manja masa  $m_1$  diže veću masu  $m_2$  kad se aparat dovoljno brzo okreće. Tada centrifugalna inercijalna sila, mase  $m_1$ , koja se preko užeta prenosi na masu  $m_2$ , postane veća od sile teže, koja deluje na masu  $m_2$ . Ako je  $m_2$  jednom podignuta, primeduje se da ponovo pada pri manjoj brzini obrtanja od brzine potrebne za njeno podizanje. To se objašnjava povećanjem razdaljine mase  $m_1$  pri podizanju od osovine obrtanja, na osnovu čega je porasla i vrednost centrifugalne inercijalne sile.

3. Kada se u sudu koji rotira nalazi neka tečnost (sl. 17.3.a), onda tečnost pri obrtanju dobija izdubljen oblik

(presek u vertikalnoj ravni je parabola). Pri stalnom broju obrta tečnost je u ravnoteži pod dejstvom centrifugalne

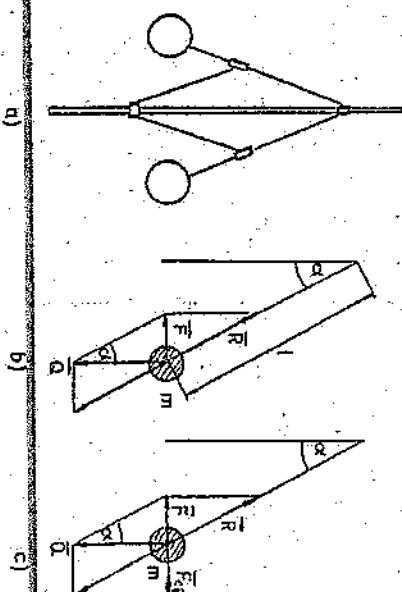


Sl. 17.3.

inercijalne sile i Zemljine teže. Za tečnosti u ravnoteži važi pravilo da rezultanta svih sila mora biti uprava na površinu tečnosti. Kada je broj obrta veoma veliki  $Q$  dobili za- nemarljivo prema  $F_{gr}$  tako da se površina tečnosti budi praktično normalna na  $F_{gr}$ . Ako se u sudu nalaze dve tečnosti, ili više tečnosti različite zapremnske mase, onda će se one razdvajati po slojevima (sl. 17.3.b). Ova pojava naročito se koristi u hemiji, bihemiji i dr. za razdvajanje dve svega organskih supstanci različitih molekularnih masa (npr. izdvajanje mastiaca iz mleka, razdvajanje proteina). Upradiji sa kojima se vrše razdvajanja nazivaju se centrifuge.

4. Vrlo poučan primer imamo kod tzv. centrifugalnog regulatora (sl. 17.4.a). Centrifugalni regulator sastoji se od dve metalne lopte postavljene tako da kad krenuju više pored jedne vertikalne obrtne osovine. Pri obrtanju lopte se udaljavaju od osovine atoličko više ukoliko je brzina obrtanja veća. Rad centrifugalnog regulatora analizirćemo prvo sa gledišta jednog posmatrača van obrtnog sistema. Na masu  $m$  (sl. 17.4.b) deluju dve sile, sila težine  $Q$  i sila reakcija  $R$ , koja se javlja u šipci  $Z$ . Uniformno obrtanje nastaje kada rezultanta  $F$  ovih dveju sila daje potrebnu cen-

tripetalnu silu  $m\omega^2 r \sin \alpha$ , za obrtanje po krugu  $r = l \sin \alpha$ .



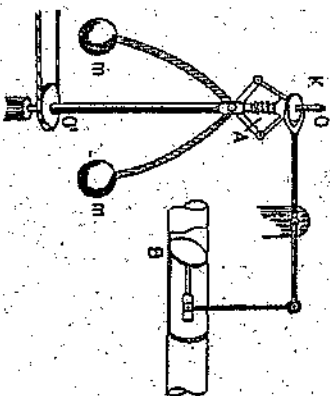
Sl. 17.4

Iz slike 17.4.b vidi se da je to slučaj kada je  $F = Q \operatorname{tg} \alpha$ , proizilazi da je  $Q \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 r \sin \alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{Q}{m\omega^2 r}$$

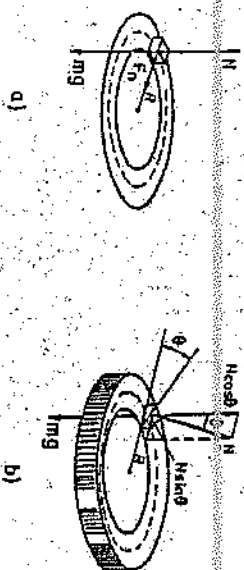
Kako imamo različite različitosti, različitosti pokretnog posmatrača, onda se uz sile  $F$  i  $R$  javlja i centrifugalna sila  $F_{ci}$  (sl. 17.4.c). Oba načina razmatranja razlikuju se u tome što kod prvog sile  $Q$  i  $R$ , koje deluju na kugle nisu u ravnoteži jer postoji rezultanta  $F$ , dok kod drugog razmatranja sve tri sile  $Q$ ,  $R$  i  $F_{ci}$  su u ravnoteži. Centrifugalni regulator se u potrebnosti za regulisanje broja obrtaja zamajca parne mašine (sl. 17.5). Na rotirajuću osovinu  $OO'$  postavljene su dve masivne kugle  $m$  koje su spojene sa spojnicom  $K$ , o koju se upine opruga  $A$ . Spojnica je vezana sistemom poluga sa ventilom  $B$ , koji reguliše dovod pare u radni cilindar. Pri rotaciji kugle se razilaze i povlače spojnicu  $K$  nanizže okrećući samim tim ventil. Pri povećanju broja obrtaja oko ose iznad neke norme, ventil  $B$  smanjuje dovod pare u cilindar. Pri smanjenju broja obrtaja ispod norme počinje da se povećava dovod pare. Tako se održava

stalna ugaona brzina rotacije.



Sl. 17.5

5. Pri kretanju vozila u krivini, radijusa  $R$  (sl. 17.5.a) na njih ne deluje centrifugalna inercijalna sila. Sile koje deluju



Sl. 17.6

na masu  $m$  u ovom slučaju su težina  $mg$ , normalna sila  $N$  i centrifugalna sila  $F_n$ . Centrifugalna sila je na primer kod automobila uzrokovana trenjem guma po putu. Da se smanji takvo trenje, koje troši gume i put, moramo ravan puta nagnuti kao na slici 17.6.b. Tada normalna sila  $N$  ima horizontalnu kom-

ponentu  $N \sin \theta$  prema centru krivine, koja zamenjuje centripetalnu silu zbog trenja. Ugao nagiba  $\theta$  potreban da bi se kretanje obavilo bez trenja, dobija se izjednačavajući pomenutu komponentu sa radijalnom silom  $mv^2/R$  i uzimajući u obzir da nema vertikalnog ubrzanja

$$N \sin \theta = \frac{mv^2}{R}; N \cos \theta = mg$$

odakle je

$$mg \tan \theta = \frac{mv^2}{R}$$

odnosno

$$\tan \theta = \frac{v^2}{Rg}$$

U poslednjem obrascu se ne javlja masa vozila, što znači da ugaonost zavisi od mase vozila, već samo od brzine i poluprečnika krivine  $R$ . Zato, nagib puta mora da bude veći na oštrijim krivinama (nagib krivine  $R$  manji) i auto-putevima.

8. Kod rotirajućih sistema, kao što su točkovi vozila, obrtni delovi raznih mašina (strugova, bušilica, brusilica, rotirajući bubnjevi itd.) moraju biti usled delovanja centrifugalnih inercijalnih sila  $F = m \omega^2 r$  uvek ravnomerno. Zbog toga, zultanta centrifugalnih inercijalnih sila nije jednaka nuli, te se kod navedenih sistema pojavljuju vibracije koje mogu dovesti do kidanja materijala. Stoga se problemu balansiranja kod rotirajućih sistema mora posvetiti posebna pažnja.

### 111 RAD I ENERGIJA

#### 18. RAD

U svakodnevnom životu pod nazivom rad podrazumevamo svaki oblik aktivnosti koji zahteva mislićni napor i upotrebu mašina. U fizici je pojam rada strogo definisan i odnosi se na savladavanje sile na datom putu. Dakle, naš zadatak će biti da pronadjemo izraz koji će na adekvatan način povezati silu i kretanje, osnovne veličine koje smo do sada uveli, u jednu novu, složenu veličinu, koju ćemo nazvati rad.

Videli smo na koji način se tela ubrzavaju pod dejstvom sile  $F$  i da se tela pri tome pomeraju u prostoru. U mehanici se pomoću rada opisuje dejstvo sile povezano sa pomeranjem tela u prostoru. Iz iskustva je poznato da ako na neko telo deluje sila konstantnog intenziteta u pravcu i smeru kretanja (Sl. 18.1) rad ove sile na putu od tačke A do tačke B iznosi

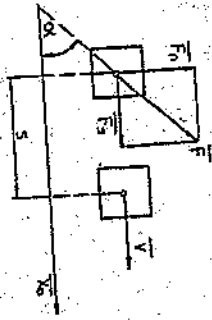
$$A = F \cdot s \quad (18.1)$$

tj. rad je pri navedenom premeštanju tela jednak proizvodu iz sile i predjelog puta.



Sl. 18.1

Ako po intenzitetu stalna sila  $F$  (Sl. 18.2), koja deluje na telo zaklapa uvek isti ugaonost  $\alpha$  sa putem  $s$  može se razložiti na dve komponente  $F_n$  i  $F_s$ . Dok komponenta  $F_n = F \sin \alpha$  ne vrši rad, jer se telo ne kreće u njenom pravcu, dotična kom-



Sl. 18.2

ponenta u pravcu puta  $F_s = F \cos \alpha$  vrši rad, tako da je prema (18.1)

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha \quad (18.2)$$

Obrasc (18.2) pokazuje neke okolnosti pri vršenju rada. Naime, kad je  $\alpha = \pi/2$ , tj. kada je sila normalna na put rad je jednak nuli. Kad je  $\alpha = 0$  ili  $\alpha = \pi$ , tj. kada je sila paralelna sa putem, sila vrši rad celim

definisanoj skalarne proizvoda, jednačina (18.2) može se na bazi ranije

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \quad (18.3)$$

taj rad je skalarni proizvod sile  $F$  i pomeranja  $s$ . Postoji međutim, niz situacija kod kojih sila koja deluje na telo nije konstantna, nego se menja duž pomeranja. Tada ćemo izraz (18.2) naći u infinitesimalno kratkom vremenskom intervalu telo će preći infinitesimalni deo puta  $ds$ , pa će i sila izvršiti infinitesimalni deo rada

$$dA = F \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad (18.4)$$

Za konačan rad u konačnom vremenu  $t$  pri čemu se telo pomakne od  $s_1$  do  $s_2$  rad će biti

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cos \alpha \, ds \quad (18.5)$$

Ako se i intenzitet i smer sile menja tokom pomeranja  $s$ , tada je potrebno poznavati i smer sile (tj.  $\cos \alpha$ ) kao funkciju pomeranja  $s$ . U tom slučaju integracija može biti i komplikovana.

Jedinica za rad je džul (J). Rad od 1 J izvrši sila od 1 N na putu od 1m, ako je sila u pravcu puta:  $(1J = 1N \cdot 1m)$ .

Rad je tesno povezan sa pojmom energije i videćemo kasnije da je rad mera za promenu energije tela.

### 19. SNAGA

Pri definiciji rada nismo uzimali u obzir vreme za koje su delovale sile. Pri podizanju tereta na visinu  $h$  izvrši se rad  $m \cdot g \cdot h$ , bez obzira da li smo predmet naglo ili sporo podigli. U mnogo slučajeva, međutim, potrebno je znati brzinu kojom se vrši rad, odnosno vreme za koje se rad vrši. Da bi se okarakterisala brzina vršenja rada, uvedena je fizička veličina koja se naziva snaga.

Pri definisanju snage (brzina vršenja rada) poći ćemo istom analogijom kao i pri definisanju prostorne brzine (brzine prelaženja datog puta). Ako u vremenu  $t$  izvršimo rad  $A$ , tada ćemo srednju snagu definisati kao

$$\bar{P} = \frac{A}{t} \quad (19.1)$$

Ako se izvršeni rad menja od jednog vremenskog intervala do drugog, definićemo trenutnu ili pravu snagu tako da analiziramo rad izvršen u sve kraćem vremenskom intervalu  $dt$

$$P = \frac{dA}{dt} \quad (19.2)$$

Na osnovu (19.1) i (18.1) može se definisati snaga konstantne sile  $F$  na putu  $s$  kao

$$\bar{P} = \frac{A}{t} = F \frac{s}{t} = F \cdot \bar{v} \quad (19.3)$$

gde je  $\bar{v}$  - srednja brzina.

Ako se ne radi o konstantnoj sili, analizira se rad u veoma kratkom vremenskom intervalu  $dt$ , za koji sila  $F$  deluje na kratkom putu  $ds$ . U tom slučaju se izraz (19.3)



svodi na

$$P = F \frac{ds}{dt} = F \cdot v \quad (19.4)$$

Snaga se dakle može dobiti kao proizvod sile i trenutne brzine kretanja tela. Ukoliko sila ne deluje u smeru kretanja (brzine) analožno izrazu (18.3) za rad, dobija se i za snagu

$$P = F \frac{ds}{dt} \cos \alpha = F \cdot v \cos \alpha$$

odnosno

$$P = F \cdot v \quad (19.5)$$

Jedinica za snagu je  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^3$  i odgovara brzini vršenja rada od  $1 \text{ J} / \text{s}$ . ( $1 \text{ W} = 1 \text{ J} / \text{s}$ ).

U tehnici se rad često izražava pomoću jedinica za snagu. Tako su nastale jedinice: vat-sekunda i kilovat-tas itd.

Vat-sekunda ( $\text{Ws}$ ) je rad koji mašina snage  $1 \text{ W}$  izvrši za vreme  $1 \text{ s}$ , tj.

$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ W} \cdot 1 \text{ s} = 1 \text{ J}$$

Kilovat-tas ( $\text{kWh}$ ) je rad koji mašina snage  $1 \text{ kW}$  izvrši za vreme od  $1$  časa, tj.

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

## 20. ENERGIJA

Nada je pojam energije prilično teško definisati, on nam je blizak iz svakodnevnog života. Poznato je da sam rada koji vrše ljudi i životinje postoje i druge vrste rada. Na primer, voda koja teče može da obrće vodenični točak, kamen prilikom pada sa izvesne visine može da izvrši rad, itd. bižena opruga prilikom puštanja može da izvrši rad, itd. Fizička veličina koja karakteriše sposobnost tela ili sistema tela da izvrše rad naziva se energijom. Pri vršenju rada telo gubi energiju i prenosi je na sistem koji vrši rad. Rad

se, znati, može definisati kao proces kojim se vrši prenošenje energije među telima.

Teorema (stav) o radu i energiji. Iz iskustva je poznato da je energija, koju izgubi (utroši) telo vršeci rad, jednaka tom radu i obrnuto, rad izvršen nad nekim telom jednak je povećanju njegove energije

$$\Delta E = E_f - E_i = A \quad (20.1)$$

Na ovaj način je uspostavljena veza između promene energije i rada, čime je omogućeno nalaznje energije preko izvršenog rada. Ova veza dalje pokazuje da se energija i rad izražavaju istim jedinicama, iako je po svojoj prirodi u karakterističnom stanju tela, dok je rad veličina koja karakteriše promenu tog stanja. Telo poseduje energiju, a rad predstavlja proces prenošenja energije sa jednog tela na drugo, ili proces pretvaranja jednog oblika energije u drugi. Na primer, pri elastičnom sudaru dva tela, jedno telo predađe drugom deo svoje energije.

Energiju, kao i masu, predstavlja jednu od osnovnih karakteristika materije. U klasičnoj mehanici ove dve veličine su međusobno nezavisne. Tek je u relativističkoj mehanici pokazano da je energija proporcionalna masi tela, čime je uspostavljen njihov međusobna veza. U klasičnoj mehanici postoje dva oblika energije i to kinetička i potencijalna.

### 20.1. Kinetička energija

Da bismo uveli matematički izraz za kinetičku energiju tela, izračunavamo rad sile  $F$ , koja deluje na telo mase  $m$ , koje se kreće po horizontalnoj podlozi bez trenja. Sila daje telu ubrzanje  $a$ , koje ćemo dobiti primenom II Njutnovog zakona. Neka brzina naste od  $v_1$ , u početnom položaju  $s_1$ , do  $v_2$  u krajnjem položaju  $s_2$ . Rad koji izvrši sila izmo-

sl

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$

Kako je  $F = ma$  i  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ , dobijamo

$$A = \int_{s_1}^{s_2} m \cdot v \frac{dv}{ds} ds = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v dv$$

a nakon integriranja

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad (20.2)$$

Ako relaciju (20.2) uporedimo sa teoremom (20.1) vidimo da je matematički izraz za kinetičku energiju opšteg oblika

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \quad (20.3)$$

Eksplicitno značenje kinetičke energije vidimo iz izraza (20.2) za rad sile. Pri vršenju rada sila  $F$  se može povećati ili smanjati; takode i put  $s_2 - s_1$  može biti velik ili mali. Međutim, u krajnjem izrazu se pojavljuje samo masa, te krajnja i početna brzina tela. Kada se telo pomera po horizontalnoj podlozi bez trenja, rad sile se utroši samo na povećanje brzine tela i jednak je promeni kinetičke energije.

Ako se, dakle, masa  $m$  kreće brzinom  $v$ , njena kinetička energija iznosi  $mv^2/2$ . To znači da za ubrzanje mase  $m$  od mirovanja do brzine  $v$  treba utrošiti količinu energije  $mv^2/2$ . S druge strane, ako se telo pod delovanjem neke sile usporava, njegova kinetička energija se smanjuje. Ta kinetička energija prelazi na sistem koji okružuje telo i koji na njega deluje usporavajućom silom. Rad  $F \cdot ds$ , koji to telo može izvršiti, može poticati samo od smanjenja kinetičke energije

od njene maksimalne vrednosti do nule, tj. dok se telo sasvim ne umiri.

Rezimirajući dakle, možemo reći da kad sila vrši rad delujući na masu u smeru njenog kretanja, kinetička energija mase raste. Izvršen rad meri transformaciju energije koja dolazi spolja u kinetičku energiju mase. S druge strane, kada sila deluje suprotno od smera kretanja, transformacija energije vrši se u suprotnom smeru; izvršen rad opet je mera promene kinetičke energije, ali ovoga puta energija prelazi s mase na okolinu.

## 20.2. Potencijalna energija

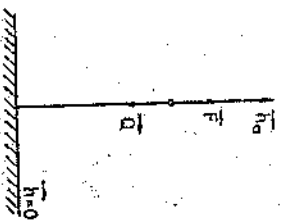
Potencijalna energija predstavlja rad koji telo može izvršiti dok se vraća u početno stanje. Telo je sposobno da ovaj rad u bilo kom trenutku vremena vrati, pa se zato potencijalna energija formalno definiše kao sposobnost tela da izvrši rad zahvaljujući položaju i stanju u kome se nalazi. Najaktuelnija polja sile u mehanici su gravitaciono polje i polje elastičnih sila, pa se otuda govori o gravitacionoj i elastičnoj potencijalnoj energiji.

### a. Gravitaciona potencijalna energija

Da bismo dobili matematički izraz za energiju položaja tela u gravitacionom polju izvršaćemo minimalan rad potreban da se telo mase  $m$  digne na visinu  $h$  računajući od nekog proizvoljnog nivoa, recimo površine Zemlje (sl. 20.1). Kako je težina tela  $Q = mg$  ili u vektorskom obliku

$$\vec{Q} = -mg\vec{h}_0 \quad (20.4)$$

gde je  $\vec{h}_0$  jedinični vektor, koji određuje pravac i smer  $\vec{h}$ , to je



Sl. 20.1

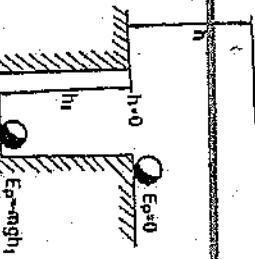
sila  $F$  potrebna da podignemo telo po inentenzitetu konstantna i jednaka težini tela

$$F = -Q = mgh \quad (20.5)$$

Rad potreban da podignemo telo prema (10.1) iznosi

$$A = E_p = F \cdot h = mgh \quad (20.6)$$

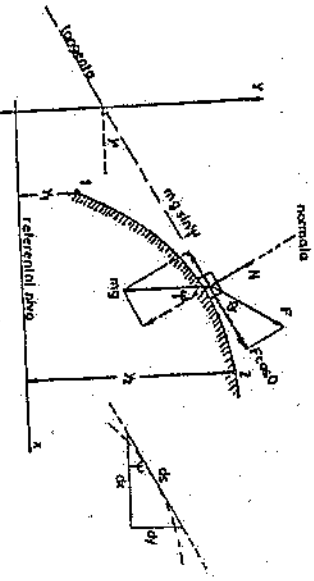
tj. potencijalna energija nekog tela u gravitacionom polju zavisi samo od njegove visine u odnosu na površinu Zemlje ( $h=0$ ). Kako se nulti nivo potencijalne energije može biti i negativan.



Na primer, prema slici 20.2. postavimo telo na površini Zemlje ( $E_p = 0$ ), na visini  $h$   $E_p = mgh$ , a u jami dubine  $h_1$   $E_p = -mgh_1$ .

Sl. 20.2

Predpostavimo, sada da telo nismo podizali vertikalno, nego po bilo kakvoj krivoj površini bez trenja (sl. 20.3). Za



Sl. 20.3

vreme infinitezimalnog pomaka  $ds$  duž krivine postoje tri sile koje deluju na telo: težina  $mg$  prema dole, normalna sila  $N$  koja predstavlja reakciju podloge i spoljašnja sila  $F$  koja pomera telo prema gore. Neka sila  $F$  zaklapa sa tangentom na površini ugao  $\theta$ . Za telo koje se polako pomera po površini tangencijalne komponente svih sila moraju biti u ravnoteži, tj. mora biti

$$F \cos \theta - mg \sin \theta = 0 \quad (20.7)$$

Rad koji izvrše spoljašnje sile pomerajući telo iz tačke 1 u tačku 2 iznosi

$$A = \int_1^2 F \cos \theta ds \quad (20.8)$$

ili prema (20.7)

$$A = \int_1^2 mg \sin \theta ds \quad (20.9)$$

Otkrivamo, iz infinitezimalnog puta  $ds$ , njegove vertikalne komponente  $dy$  i ugla  $\theta$  prikazan je na slici 20.3. Odbijemo je

$$ds \sin \theta = dy$$

pa je

$$A = \int_1^2 m \cdot g \cdot dy$$

odnosno

$$A = m \cdot g \cdot Y_2 - m \cdot g \cdot Y_1 \quad (20.10)$$

Izraz (20.10) pokazuje da izvršen rad zavisi samo od početnog

( $y_1$ ) i krajnjeg položaja ( $y_2$ ), a nezavisan je od oblika puta-  
nje duž koje smo pomerali telo. Fizička polja u kojima izvršen  
rad ima ovakvu osobinu zovu se konzervativnim poljima. Sile  
koje imaju ovakva polja zovu se potencijalne sile. Za bilo ko-  
ju potencijalnu silu  $F$  potencijalna energija se može izraču-  
nati iz formule

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + C \quad (20.11)$$

b. Potencijalna energija elastične deformacije

U mehanici se često sreće još jedan tip potencijal-  
ne sile, a to je elastična sila. Posmatramo elastičnu silu  
nog sistema od ravnotežnog položaja.

$$\vec{F}_e(x) = -kx \quad (20.12)$$

Sile sa ovakvim osobinama se nazivaju harmonijskim  
silama. Izračunavamo rad potreban da se elastična opruga is-  
tegne za dužinu  $\Delta$  od ravnotežnog  
položaja (sl. 20.4). Silu istezanja možemo napisati u obliku

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_e = kx \quad (20.13)$$

te pri istezanju od 0 do  $\Delta$  ukupno  
vršimo rad

$$A = \int_0^{\Delta} \vec{F}_e \cdot d\vec{x} = k \int_0^{\Delta} x dx = k \frac{\Delta^2}{2} \quad (20.14)$$

Sl. 20.4 pa možemo reći da smo ovim radom  
povećali potencijalnu energiju opruge sa 0 na

$$E_p = k \frac{\Delta^2}{2} \quad (20.15)$$

c. Absolutne vrednosti potencijalne i kinetičke  
energije

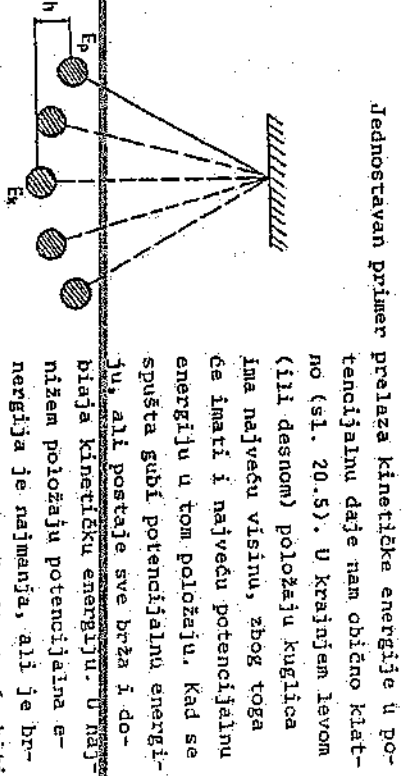
Definicija gravitacione potencijalne energije,  $mgh$ ,  
impliira da je potencijalna energija jednaka nuli kada je  
 $h=0$ , tj. kada se telo nalazi na nulom referentnom nivou. Me-  
đutim, određivanje nulog referentnog nivoa visine sasvim  
je proizvoljno. Podignemo li telo sa stola, tada nam je nulti  
nivo površina stola. No očito je da je površina stola sasvim  
proizvoljni nulti nivo: na primer, za pod sobe površina stola  
je već povišeni nivo, gde potencijalna energija nije nula. Ta  
neodređenost, međutim, nije značajna u praksi, jer se uvek  
radi o razlici potencijalnih energija, koja je nezavisna od  
referentnog nivoa. Potencijalna energija je određena, dakle,  
do na additivnu konstantu. Takođe treba uočiti da je potenci-  
jalna energija svojstvo sistema, a ne pojedinih njegovih de-  
jva. Ako, na primer, rukama podignemo neki predmet sa poda, mi  
smo istovremeno nogama odgurnuli Zemlju. Kad bi Zemlja i po-  
dignuti predmet (na primer jedan planetoid) bili uporedive ve-  
ličine, ne bi bilo jasno kojem od ta dva tela treba povećati  
potencijalnu energiju. Ispravno je shvatanje da je gravitacio-  
na potencijalna energija povećana u celom sistemu, tj. da se  
potencijalna energija sistema dva planetoida povećala kad ih me-  
đusobno udaljimo. Slično tome se, na primer, potencijalna  
energija elastične opruge povećala kad je rastegnemo.

Slična razmatranja mogu se preneti i na kinetičku  
energiju. Kinetička energija tela koje miruje u laboratoriji  
je nula. No znamo da se to isto telo kreće zajedno sa Zemljom  
velikom brzinom, koju mi ne opažamo. Samo je dakle njegova ki-  
netička energija kretanja s obzirom na Zemlju jednaka nuli. I  
kinetičku energiju dakle definišemo do na jednu additivnu kon-  
stantu s obzirom na određeni inercijalni sistem.

20.3. Zakon održanja energije

U mehanici vrlo često analiziramo zatvorene siste-  
me, tj. takve sisteme na koje ne deluju spoljašnje sile. Sile

u takvim sistemima se pojavljuju samo kao međudjelovanja tela u sistemu. Rad u tim sistemima se odvija kroz izmenu energije. Pitanje koje možemo postaviti jeste da li se energija u tim procesima transformacije izgubi ili ostaje sačuvana.



Sl. 20.5

Jednostavan primer prelaza kinetičke energije u potencijalnu daje nam obično klatno (sl. 20.5). U krajnjem levom (ili desnom) položaju kuglica ima najveću visinu, zbog toga će imati i najveću potencijalnu energiju u tom položaju. Kad se spušta gubi potencijalnu energiju, ali postaje sve brža i do- bija kinetičku energiju. U naj- nižem položaju potencijalna e- nergija je najmanja, ali je br- zina kuglice najveća, pa će biti najveća i kinetička energija. Drugim rečima, kinetička i po- tencijalna energija nisu stalne. One se neprestano me- njaju, ali koliko se jedna poveća toliko se druga smanji. Nji- hov zbir ostaje stalan. Zato govorimo o očuvanju energije i to ne samo kinetičke ili samo potencijalne, već ukupne ener- gije. To se može napisati u obliku

$$E = E_k + E_p$$

(20.16)

ili formulisati na sledeći način: ukupna mehanička energija ( $E$ ) za- tvornog sistema tela, između kojih dejstvuju samo potencijalne sile, ostaje nepromenjena, t.j. u zatvorenom sistemu u kojem ne deluju sile trenja, zbir kinetička i potencijalne energije (mehanička energija) je konstantan. Ovo pravilo se zove i zakon o održanju mehaničke energije.

Navedeni primer kvalitativno ilustruje zakon o oču- vanju mehaničke energije. Međutim, nije jasno da li ovo raz- matranje važi i kvantitativno, tj. da li je u svakom položaju kuglice pri njihovom zbiru kinetičke i potencijalne energije

stalan. Analizirajmo zato primer slobodnog pada (sl. 20.6),

gde telo iz stanja mirovanja pada sa visine  $h$ . Na početku je njegova kineti- čka energija nula. Na osnovu (20.16) ukupna energija sastoji se dakle samo od potencijalne energije i iznosi

$$E = E_p = mgh$$

Nakon pada (otpor vazduha se zanemaru- je) za proizvoljnu visinu  $x$  telo ima brzinu  $v_x$  i kinetičku energiju  $mv_x^2/2$ . Ukupna energija je

$$E = \frac{mv_x^2}{2} + mgh(x)$$

Kako je brzina kod slobodnog pada prema (5.2)  $v_x = \sqrt{2gh}$ , to je energija tela

$$E = \frac{m}{2} 2gh + mgh(h - x) = mgh$$

jednaka kao na početku.

Telo, slobodno padajući, posle izvesnog vremena pa- dne na površinu Zemlje ( $h=0$ ) i tada mu je potencijalna energija jednaka nuli. Kako je brzina tela u trenutku udara o Zemlju  $v = \sqrt{2gh}$ , dobija se da je kinetička energija u tom položaju

$$E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m 2gh = mgh$$

tj. jednaka je energiji tela koju je ono imalo na visini  $h$ . Odatle se vidi da telo prilikom slobodnog pada održava svoju ukupnu mehaničku energiju, iako se potencijalna energija pre- tvara u kinetičku.

Izraz (20.16), iako razmatran u jednom posebnom slučaju, je opšti. Naime, radi jednostavnosti u prethodnim primerima, govorili smo samo o potencijalnoj i kinetičkoj e- nergiji i njihovom zbiru. Da smo u razmatranje uključili i trenje, struktura izraza (20.16) ostala bi ista, samo bi se

sa desne strane pojavio izraz za rad sile trenja. No, u svakom slučaju, rad spoljašnjih sila  $A_F$  bio bi jednak zbiru promene kinetičke energije  $\Delta E_K$  i potencijalne energije  $\Delta E_P$  uvećane eventualno za rad sile trenja  $A_{tr}$ :

$$A_F = \Delta E_K + \Delta E_P + A_{tr} \quad (20.17)$$

Ako zanemarimo trenje i ako je sistem zatvoren, tada je rad spoljašnjih sila  $A_F = 0$ , te iz iznaza (20.17) dobijamo

$$\Delta E_P + \Delta E_K = 0$$

ili

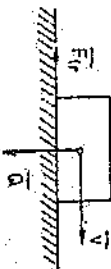
$$E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2}$$

čime je pokazano da se energija izolovanog sistema ne može promeniti, već samo pretvarati u razne vidove. Demonstrirani zakon je jedan od fundamentalnih zakona fizike i u opštem obliku važi u svim oblastima prirodnih nauka.

## 21. TREŃE

Pri proučavanju kretanja do sada nismo vodili računa o trenju. Međutim, uvek kada se jedno telo kreće, bilo po čvrstoj podlozi ili kroz neku tečnost ili gas, na njega između ostalih sila deluje i sila trenja. Sila trenja se javlja kod tela koja se relativno kreću jedno prema drugom doirujući se izvesnim delovima svoje površine. Sile trenja su uvek usmerene nasuprot smeru kretanja tela (sl. 21.1). Šamo trenje je vrlo komplikovana pojava i mada možemo reći da je trenje posledica delovanja molekularnih sila na površini tela, detaljni mehanizam trenja još nije sasvim poznat. Trenje postoji i u slučaju mirovanja tela i naziva se statičko trenje, za razliku od trenja u stanju kretanja koje se naziva dinamičko. Sile trenja vrše rad na telima smanjujući njihovu energiju

$$A_{tr} = F_{tr} \cdot s = -F_{tr}^* s \quad (21.1)$$



Sl. 21.1

što se makrofizički opisuje kao "gubitak" mehaničke energije. Trenje koje se javlja pri međusobnom proklizavanju slojeva tečnosti zove se viskozni trenjem, dok se trenje među čvrstim telima zove suvim trenjem. Trenje još delimo na trenje klizanja i trenje kotrljanja.

### a. Suvu trenje klizanja

Za slučaj klizanja tela po nekoj podlozi eksperimentalno je utvrđeno da je sila trenja  $F_{tr}$  proporcionalna normalnoj komponenti sile  $N$ , kojom telo pritiskuje podlogu, tj.

$$F_{tr} = \mu \cdot N; \quad \mu = \frac{F_{tr}}{N} \quad (21.2)$$

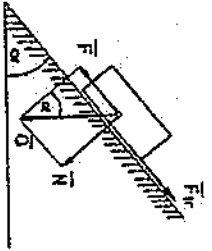
gde je  $\mu$  - koeficijent proporcionalnosti i naziva se koeficijent trenja. Eksperimentalno je nađeno da sila suvog trenja ne zavisi od dodirne površine tela; već samo od sile kojom telo deluje na podlogu.

U primeru kretanja tela, predstavljenom na slici 21.1., sila trenja je

$$F_{tr} = \mu Q; \quad \mu = \frac{F_{tr}}{Q} \quad (21.3)$$

kada se telo nalazi na stromoj ravni (sl. 21.2), težina tela  $Q$  može da se razloži na dve komponente - komponentu  $F = Q \sin \alpha$  u pravcu strme ravni i normalnu komponentu  $N = Q \cos \alpha$ . Na osnovu (21.2) može se napisati da je

$$F_{tr} = \mu N = \mu Q \cos \alpha$$



Sl. 21.2

Ako se ugao strme ravni podеси da telo klizi niz strmu ravan stalnom brzinom ( $\dot{v} = \text{const.}$ ), onda su sile  $F_t$  i  $F_{gr}$  u ravnoteži, tj.

$$\dot{v} \sin \alpha = \mu \dot{v} \cos \alpha$$

ili

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (21.4)$$

Izraz (21.4) omogućuje da se merjenjem nagibnog ugla strme ravni odredi koeficijent trenja.

Koeficijent trenja zavisi od vrste materijala i obnadjenosti dodirnih površina, kao i od brzine kretanja tela.

Ovaj koeficijent ima najveću vrednost kada je uzajamna brzina tela  $v = 0$  (statički koeficijent trenja). Pri malim brzinama koeficijent trenja ima malu vrednost i generalno se njegova vrednost povećava sa povećanjem brzine kretanja.

Da bi umanjili uticaj trenja na kretanje tela po podlozi upotrebljavaju se sredstva za podmazivanje. Kad se upotrebi takvo sredstvo, a to je najčešće neko ulje, onda se izloženi zakoni trenja znatno menjaју. Sila trenja nije više nezavisna od veličine dodirne površine, već više zavisi od njene nego od normalnog pritiska.

Najčešće se uticaj trenja smanjuje na taj način što se, kad god je to moguće, trenje klizanja zamenjuje trenjem kotrljanja upotrebom valjkastih ili kugličnih ležaja.

Ne treba naglašavati da trenje nije uvek štetna pojava. Da nema trenja automobili, vozovi itd. ne bi mogli da se kreću. Ukoliko ne bi bilo trenja, hodanje bi bilo kao na poleđici. Mo i pored toga, trenje može biti štetna pojava; na primer, trenje u pokretnim delovima raznih mašina u mnogome utiče na njihov vek trajanja.

#### IV GRAVITACIJA

##### 22. NJUTNOV ZAKON GRAVITACIJE

Od svih sila sa kojima se sređemo u svakodnevnom životu najočitija je težina. Svako telo na Zemlji ima težinu, što znači da svako telo na Zemlji, prepušteno samo sebi, pada ubrzano po trajektoriji koja je u proseku normalna na Zemljinu površinu. Kažemo "u proseku", jer druge sile, na primer otpor trenja, mogu deformisati pravolinijsku putanju koju, na primer, zapažamo pri padanju težih tela.

S druge strane, ne manje uočljiva pojava bilo je kružno kretanje nebeskih tela po nebeskom svodu. Dnevno kretanje zvezda i godišnje kretanje Sunca, koje vidimo na nebu, nija kretanja Meseca i planeta, budili su interes i znatiželju ljudi od nauke od davnina. Medjutim, ideja da su te dve pojave, težina i kretanje nebeskih tela, povezane relativno je nova. Naime, gotovo dvadeset vekova posle postavke Prolomejeve teorije geocentričnog sistema<sup>44</sup> torunjski biskup Nikola Kopernik postavija teoriju heliocentričnog sistema prema kojoj je Sunce središte svemira, a sve ostale planete, pa i Zemlja, kruže oko njega. Ovo je osnovna postavka heliocentričnog sistema. Druga Kopernikova postavka jeste da se Zemlja kreće oko Sunca u pravcu zapad-istok i da u toku jedne godine obiđe oko Sunca, a za 24 časa se obrne oko svoje ose. Njegova treća postavka jeste da je osa Zemlje nagnuta pod uglom od 66,5° prema ravni svoje putanje (ekliptike). O Kopernikovom naprednom shvatanju Engels je napisao: "Kopernik je prvi skitno zvezde sa neba i omogućio

<sup>44</sup> Planeti su: Merkur, Venere, Zemlja, Mars, Jupiter, Saturn i V.

<sup>45</sup> Prema teoriji geocentričnog sistema Zemlja je nepomična i naziva se u središtu svemira.

<sup>46</sup> Nikolaj Kopernik (1473-1543), poljski astronom, otkrio je heliocentričnog sistema, koji je postavio u svom delu "De revolucionibus orbium caelestium, libri VI", izdatim nekoliko meseci pre smrti. Kopernik prvi put otkin imovnika čija je nauka bitno promenila svet.